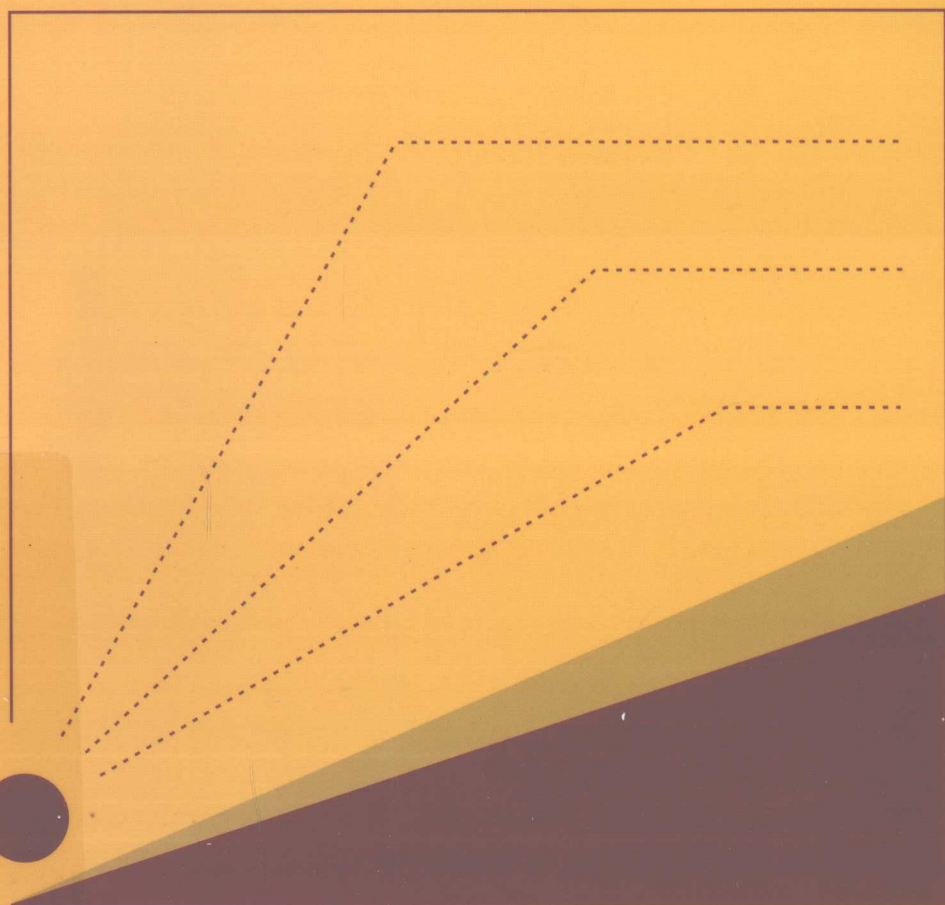


张承宗 著

# 复合材料板壳力学解析理论



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

► 上架建议：工程力学 ◀

<http://www.ndip.cn>

ISBN 978-7-118-06552-7



9 787118 065527 >

定价：45.00 元

# 复合材料板壳力学解析理论

张承宗 著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

复合材料板壳力学解析理论 / 张承宗著. —北京:  
国防工业出版社, 2009. 12

ISBN 978-7-118-06552-7

I. ①复... II. ①张... III. ①复合材料—板—材料力学  
②复合材料—壳体—材料力学 IV. ①TB330.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 172796 号

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 880 × 1230 1/32 印张 14 字数 362 千字

2009 年 12 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 45.00 元

---

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764



# 序 言

现代飞机是高度综合的现代科学技术的体现。100 多年来,飞机作为科学技术在航空领域的重要成果,随着科学技术的进步取得了飞速发展,而飞机发展不断提出的新要求也同时对科学技术的发展起到了推动作用。飞机的发展一直与结构材料的设计密切相关。20 世纪 30 年代铝合金的问世,取代了帆布和木材,曾给飞机设计带来一场革命,也促进了航空结构力学的发展。20 世纪 60 年代,先进复合材料的崛起,也同样引起了设计领域的重大技术进步。先进复合材料,具有比刚度和比强度高、可设计性强的优点,将其应用于飞机结构,提高了飞机的性能,减轻结构的固有重量,提高其可靠性、维修性、生存力和寿命。目前国外军机的机翼、尾翼等部件基本上都采用了先进复合材料,美国的 F-22 和欧洲的 EF-2000 等新机的复合材料用量都超过了 20%。刚刚试飞的波音 787 客机主承力件先进复合材料用量更是达到了 50%。我国也在 20 世纪 60 年代开始了复合材料及其应用的研究。当前,先进复合材料在飞机上应用的部位和用量的多少已成为衡量飞机结构先进性的重要标志之一。

作为复合材料在航空工程应用的技术支撑之一,复合材料结构力学受到广泛的重视。相对金属材料,复合材料具有各向异性、耦合效应、沿厚度方向剪切效应等诸多问题,这使得复合材料结构计算和设计变得相对困难一些,传统的解析分析金属结构的理论方法不能适用于复合材料结构。这使得有关复合材料结构的基础性、但又很必要的工作,很长时间没能开展起来。作者通过研究,建立了创新的复级数求解体系,以此针对复合材料结构诸多问题进行了研究分析和计算,给出了复合材料结构新的解析分析方法,解决了以往许多不能处理的

复合材料结构力学问题;对于金属结构尚未解决的一些重要问题,也给出创新的解析方法和解析解。同时还进行了数值计算,得到了许多有价值的结果。本书阐述的新解析理论意义不仅是在于新的结构力学处理方法方面,还在于建立了一种新的数学物理处理手段,数学领域的进步将会许多自然科学领域产生辐射和推动。本书出版是一件十分有意义的工作。自然科学、航空科学技术的发展,需要开展更多的创新,特别是象这样的原始性创新。作者对复合材料结构进行了长期的研究,在结构分析领域有很深的造诣,且多年致力于空军航空装备的研究、管理,积累了丰富的实践经验。希望本书的出版和应用,能有利于推动结构力学及相关领域创新发展,能有利于装备科学技术的进步。

空军装备部副部长

张伟

二〇〇九年十二月

# 前 言

力学的发展与数学物理方法的发展是并行的过程,弹性力学更是如此。从力学的问题处理程序角度来看,只要将力学模型上升到数学模型并最终归结于偏微分方程(组),并确定适当的边界条件、初始条件,余下的工作就是对偏微分方程的求解及对所得结果进行分析并用于指导实际设计。但常见的情况是,基本方程已建立起来,但求解非常困难。就弹性力学来说,其基本方程体系早在 19 世纪就已臻完善,然而其求解花费了一个多世纪,还远未完善。

弹性板壳理论是弹性力学应用理论的重要分支,弹性板壳理论虽然使方程得以简化,但即使对各向同性板壳,解析求解仍有很大困难。复合材料的应用,给弹性力学带来了新课题,也带来了新挑战。复合材料结构的各向异性、耦合效应、横向剪切效应等新力学特点反映到控制方程,不仅使控制方程个数增多(多为偏微分方程组),而且其中出现了位移函数关于空间坐标的奇次交叉偏导数,这使原先在各向同性板壳理论中发展的纳维叶法、列维法失效,常规分离变量法也无法应用。这样可解析求解的复合材料板壳结构非常有限。所幸,计算机技术及以有限元为代表的数值法飞速发展使复合材料结构有了强大的计算分析手段,这在很大程度上掩盖了复合材料板壳理论在解析研究领域严重滞后的缺陷。但不论是检验数值法,还是从力学机理角度研究结构新力学特点,解析解的发展都是不可缺少的。

20 世纪 90 年代初,作者在国防科技大学攻读硕士学位时,在导师杨光松教授指导下进行各向异性薄板力学解析分析工作,杨光松教授提出了各向异性薄矩形板横向弯曲的新级数解析解,作者进行了计算实现。工作以后,作者继续对复合材料结构的力学问题开展了解析研

究。通过多年的科研实践,感觉将实际物理力学问题从数学角度拓展到复数空间进行求解,可以解决当前数学物理力学领域许多悬而未决的解析求解问题。基于这种思想,作者将这种思想实践作为博士论文的主要工作,建立了一种新的复合材料板壳结构力学解析求解体系,发表了一系列论文,并以此获得博士学位。1999年博士毕业后至今的十年内,作者开始从事航空领域的有关研制管理工作,期间也注意到已经有一些学者开始运用这种新复级数法和解析求解思想进行了一些专题研究,取得一些成果,2009年有时间重新审视新复级数求解方法,感到这种新复级数法的应用还很有前景。在国防工业出版社的大力协助下,作者把原来的研究成果和近期部分工作整理成本书。

反映在本书的工作成果可总结如下:

### 1. 数学物理方法方面

通过对复合材料板壳结构的求解,建立了线性偏微分方程(组)矩形域、柱形域边值问题的一般解析方法——新复级数方法。新复级数方法求解思路简洁,不依赖具体问题具有一般性,但随问题复杂程度不同,具体实施难易程度亦有很大差别。复杂的问题,如考虑剪切变形理论的任意铺设斜形板理论,仅对特征根方程的推导还需借助于MCAD等计算软件。

### 2. 复合材料板壳结构力学理论方面

首次建立了复合材料板壳结构解析求解系统,首次给出了基于经典理论及一阶剪切理论的对称角铺设,基于经典理论的任意铺设矩形板、斜形板、扁壳、圆柱壳结构一般解析解和基于一阶剪切理论的任意铺设圆柱壳结构一般解析解,经实际数值验证所得一般解析解收敛稳定,可以用来计算分析复合材料结构力学问题。所建立的由通解、补充解、特解组合而得的一般解析解结构清晰。本书一般解析解按照双向求解而后综合组合而得,这样一般解析解不仅可具有对结构空间坐标系不变性,而且实际计算时易于编程。仔细分析可发现,列维解是在本书求解各向同性、正交异性问题所得通解的特殊形式,纳维叶解可归于本书一般解中的特解部

分,只不过这一特解在特定情况就是问题的解析解而已,而在求解各向同性、正交异性问题时新复级数法和分离变量法是一致的,这样在各向同性板壳中的列维解体系、纳维叶解体系、分离变量法体系最后都可归于本书提出的新复级数一般解析解体系。本书新复级数一般解析解体系具有更一般的意义。

应用本书一般解析解体系,针对平板、圆柱壳结构分别采用经典理论及一阶剪切理论进行比较计算证实,当复合材料板壳跨厚比较小时,经典理论解与剪切理论解相差较大,应用剪切理论计算分析中厚复合材料板壳是必要的,特别是对于工程应用较广的先进复合材料更应如此。进一步研究证实当板壳跨厚比( $a/h$ )较大(如  $a/h > 25$ )时,经典理论解与剪切理论解相差不大,而且跨厚比很大(如  $a/h > 200$ )时,剪切理论解解析计算可能遇到方程病态问题,此时按经典理论计算复合材料板壳更合适。

### 3. 复合材料结构力学特性研究方面

在大量数值计算的基础上,初步研究复合材料板壳结构特有的横向剪切效应、拉剪耦合效应、拉弯耦合效应、拉剪耦合效应对复合材料板壳结构的影响,结果表明,结构跨厚比不很大时,横向剪切效应对结构影响很大。在具体计算中发现  $a/h = 10$  的先进复合材料 CCCC 层合板挠度 FSDT 解能是 CLT 解的数倍,而对  $a/h = 10$  的各向同性薄板结构却可按 CLT 计算,在对  $R/h = 5$  的两端简支固定圆柱壳挠度 FSDT 解也是 CLT 解的数倍,而且内力 CLT 值比 FSDT 值小得多,这表明对于先进复合材料,其基体薄弱带来的横向剪切效应对中厚板壳结构有严重的影响,CLT 会给偏于危险的结果,应该用考虑横向剪切的 FSDT 分析中厚结构。

数值计算结果表明复合材料各种耦合效应对结构变形内力、内力矩有不同程度的影响。横向承载的对称角铺设层合板只存在弯扭耦合效应,弯扭耦合增大了板结构的变形、内力矩。任意铺设层合板同时存在的弯扭耦合、拉剪耦合、拉弯耦合,对层合板影响程度依次增大。而对横向承载的圆柱壳,拉剪耦合、拉弯耦合、弯扭耦合影响程度

是依次降低,这与层合板不同。一般情况下对于横向承载的板壳,各种耦合效应降低了板壳刚性,对板壳承载能力也有复杂影响。从本书研究可看出,目前工程界采用对称铺层设计方式是有基础的,任意铺设层合结构的采用需要深入研究其力学特性。比较而言,对于复杂承载的层合结构,一般铺设设计方式更有发展前途。

铺设角、铺设方式、铺设层数等铺设参数对复合材料板壳也有不同程度的影响。综合考虑结构总体要求选择一定的铺设方式后,铺设角对复合材料板壳有重大影响,相对而言,铺设层数影响要弱于铺设角,而且铺设层数对圆柱壳影响较层合板还要弱。对不同材料制成的板壳,强各向异性的材料制成的板壳受铺设参数影响更显著,而先进复合材料大多是强各向异性材料,而且其结构横向剪切刚度要明显低于纤维方向结构刚度,这样一来对结构分析计算更要仔细,要求也就更高了。

本书工作主要限于线性力学范畴。在实际工程中,很多情况下动力学、振动、稳定和非线性问题不可避免,运用这种新复级数方法还可以大有作为。此外,这种新复级数方法还可以作为一种标准数学物理方法,用于处理热传导等场问题。

感谢杨光松教授对作者的指导和帮助,也感谢作者工作、学习过的有关单位领导、同事和朋友们的帮助和支持。

由于作者水平有限,谬误之处在所难免,敬请读者指正。

作者  
2009年3月

# 目 录

第1章 绪论 .....	1
1.1 引言 .....	1
1.2 复合材料结构的力学特点 .....	1
1.3 复合材料板壳理论及研究方法 .....	3
1.4 复合材料板壳结构解析研究情况 .....	5
1.5 本书的主要工作 .....	8
第2章 数学力学预备知识 .....	11
2.1 弹性力学基础 .....	11
2.1.1 应力应变分析 .....	11
2.1.2 应力—应变本构关系 .....	13
2.1.3 边界条件 .....	14
2.1.4 弹性力学方程定解问题 .....	15
2.1.5 对弹性力学边界问题的简化 .....	15
2.1.6 对板壳结构物理模型的简化 .....	15
2.2 数理方程基础 .....	20
2.2.1 偏微分方程的基本概念 .....	20
2.2.2 傅里叶级数方法 .....	21
第3章 对称角铺设薄层合矩形板力学解析 .....	24
3.1 弯曲问题理论分析 .....	24
3.2 弯曲数值部分 .....	30
3.3 对称角铺设薄层合矩形板屈曲解析 .....	38
3.4 对称角铺设薄层合经典矩形板振动问题解析 .....	54
3.5 对称角铺设薄层合经典矩形板纵横弯曲问题解析 .....	60

3.6	Winkle-Pasternak 地基上各向异性经典矩形板 弯曲问题分析 .....	73
3.7	经典各向同性矩形板解析分析 .....	79
第4章	各向异性斜形板力学解析 .....	94
4.1	斜板弯曲理论分析 .....	94
4.2	斜板弯曲一般解数值计算分析 .....	99
4.3	对称角铺设薄层合经典斜形板振动解析分析 .....	107
4.4	经典各向同性斜形板解析分析 .....	113
第5章	圆柱型各向异性经典圆形板弯曲问题一般解析解 ..	127
5.1	解析求解 .....	127
5.1.1	坐标变量变换 .....	128
5.1.2	求解过程 .....	129
5.2	圆板弯曲算例讨论 .....	132
第6章	考虑一阶剪切变形的对称角铺设复合材料矩形板 静力问题解析 .....	136
6.1	弯曲问题的位移型方程 .....	136
6.2	弯曲一般解析解的建立 .....	139
6.3	弯曲解析解数值验证部分 .....	146
6.4	数值分析 .....	149
6.5	基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料 矩形板屈曲和振动问题解析 .....	156
第7章	基于一阶剪切变形的对称角铺设复合材料斜形板 静力解析 .....	169
7.1	对称角铺设斜形板理论分析 .....	169
7.2	对称角铺设斜形板弯曲解析解的数值研究 .....	177
7.3	弯曲数值结果及讨论 .....	178
7.4	基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料 斜形板振动问题解析 .....	181
第8章	各向异性矩形板平面应力问题一般解析解 .....	190



8.1	平面应力问题的位移型方程 .....	190
8.2	一般解析解的建立 .....	191
8.3	数值验证部分 .....	195
第9章	任意铺设复合材料矩形薄扁壳静力响应一般	
	解析解 .....	198
9.1	扁壳弯曲问题的位移型方程 .....	198
9.2	扁壳弯曲一般解析解的建立 .....	202
9.3	扁壳解析解数值验证部分 .....	210
第10章	任意铺设复合材料矩形薄板静力响应解析 .....	213
10.1	任意铺设复合材料矩形板弯曲问题的位移型	
	方程 .....	214
10.2	任意铺设矩形板弯曲一般解析解的建立 .....	216
10.3	任意铺设矩形板弯曲解析解数值验证部分 .....	223
10.4	任意铺设矩形板结构力学响应数值分析 .....	227
10.5	基于经典理论的一般铺设复合材料矩形板屈曲和	
	振动问题解析 .....	238
第11章	考虑剪切变形的任意铺设复合材料矩形板	
	静力响应解析研究 .....	250
11.1	考虑剪切变形的斜形板弯曲问题位移型方程 .....	251
11.2	考虑剪切变形的斜形板弯曲一般解析解的建立 .....	255
11.3	考虑剪切变形的斜形板弯曲解析解数值验证及	
	结构计算结果总体分析 .....	268
11.4	基于一阶剪切理论的一般铺设复合材料矩形板	
	屈曲和振动问题解析 .....	272
第12章	任意铺设复合材料薄圆柱壳静力响应解析 .....	288
12.1	任意铺设复合材料薄圆柱壳弯曲问题的位移型	
	方程 .....	288
12.2	任意铺设复合材料薄圆柱壳静力问题一般解析	
	解的建立 .....	291

12.3	任意铺设复合材料薄圆柱壳弯曲问题数值分析 .....	294
12.4	经典任意铺设复合材料薄圆柱壳屈曲和 振动问题解析 .....	310
第13章	考虑剪切变形的任意铺设复合材料圆柱壳线性力学 响应问题一般解析解 .....	317
13.1	线性力学响应问题的位移型方程 .....	317
13.2	圆柱壳线性力学问题一般解析解的建立 .....	321
13.3	解析解数值验证及结构力学特性总体分析 .....	328
13.4	圆柱壳力学结构数值研究部分 .....	334
13.5	基于一阶剪切理论的任意铺设复合材料圆柱壳 屈曲和振动问题解析 .....	349
第14章	任意铺设复合材料斜形薄板静力响应解析 .....	356
14.1	斜坐标系下的弯曲控制方程 .....	356
14.2	任意铺设复合材料斜形薄板静力弯曲一般 解析解的建立 .....	359
14.3	弯曲一般解析解的数值计算 .....	366
14.4	基于经典理论的一般铺设复合材料斜形板 振动问题解析 .....	370
第15章	基于一阶剪切理论的任意铺设复合材料斜形板静力 响应解析 .....	378
15.1	力学控制方程 .....	378
15.2	斜板弯曲问题求解过程 .....	383
15.3	解析解的数值计算结果分析 .....	396
15.4	基于一阶剪切理论的一般铺设复合材料 斜形板振动问题解析 .....	399
第16章	各向异性稳态热传导解析 .....	411
16.1	矩形域各向异性热传导控制方程 .....	411
16.2	矩形域问题解析解求解过程 .....	411
16.3	矩形域问题解析解数值分析部分 .....	414

16.4 各向异性斜形域稳态温度场解析 .....	417
16.5 各向异性圆形域稳态温度场解析 .....	419
附录 新复级数解推导过程 .....	421
参考文献 .....	425

# 第1章 绪论

## 1.1 引言

复合材料是由两种或两种以上的单一材料由物理或化学方法,经人工复合而成的一种多相材料。复合材料及其结构产品与金属材料相比,可大幅度地降低能量消耗和材料的消耗。复合材料在力学性能方面给材料及结构设计人员提供了自由度,而且在声、光、电等方面提供了可调性。由于复合材料的诸多优点,其在航空、航天、舰船等领域获得广泛的应用。作为一种新型材料,复合材料的应用研究为许多领域提供了研究课题。对于力学方面,复合材料作为一种各向异性材料,成为力学界研究的重点之一,20世纪50年代兴起的复合材料力学被认为是现代力学发展的重要标志之一。在工程中,以碳纤维/环氧为代表的纤维增强复合材料,多制成多层板壳结构,复合材料板壳研究有着现实的理论及工程应用价值。

## 1.2 复合材料结构的力学特点

与金属结构相比,复合材料及其结构具有独特的物理特点。

(1) 各向异性。复合材料在弹性常数、热膨胀系数和材料强度等方面具有明显的各向异性性质。通过铺层设计制成的复合材料叠层结构,可能呈现各种形式和各种程度的各向异性,各向异性这一特性使复合材料及其结构的力学结构复杂化,这给复合材料结构设计计算带来许多困难。另一方面,各向异性可以作为优点在设计中加以利用

用。因为结构的形式、加载方式、边界条件和使用要求的不同,结构在不同方向对强度和刚度的要求也往往不同,故采用合理的铺层可在不同的方向分别满足设计要求,使结构设计得更为合理,能明显减轻质量和更好地发挥结构的效能。

(2) 不均匀性和不连续性。复合材料的单向层片是由纤维和基体组成的,在微观构造上是不均匀的。叠层复合材料除了层片之内存在着这种不均匀外,由于铺层材料和铺层方向的不同,沿厚度方向又增加了一重不均匀性,既所谓的呈层性。通常复合材料叠层结构一般存在拉剪耦合,拉弯耦合与弯扭耦合效应以及脱层问题,这给复合材料分析带来极大困难。在复合材料中也不同程度地存在纤维断裂、基体开裂、界面结合不善、脱层和空隙等现象,随着应力水平的提高和环境影响,使结构局部发生位移、应力和应变的不连续,因而使连续介质力学的原理和方法不能完全适用,这极大地影响复合材料强度分析。复合材料的不均匀性和不连续性是目前复合材料性能分散的主要原因之一,这在一定程度上限制了复合材料的使用。

(3) 层间剪切模量较低,层间剪切和拉伸强度甚低。复合材料层间剪切模量一般只有沿纤维方向模量的数十分之一。在解决复合材料结构力学问题时,很多情况下,需要考虑沿厚度方向剪切变形的影响,它使计算变得很复杂。由于层间剪切强度和层间拉伸强度只有纤维方向拉压强度的数十分之一,脱层破坏发生的可能性增大,给复合材料计算分析带来新的困难。

(4) 拉压模量和拉压强度不等。复合材料不同程度地存在拉压模量不相同的现象,而且是非线性的,这使得分析计算变得更为复杂和困难。由于复合材料在受载后其受拉区和受压区一时难于准确判断,需要多次假定和反复试算才能判断,增大了工作量。所幸,对于常见纤维复合材料,模量差别问题并不突出,采用拉压模量相同的简化假定,误差并不大。但由于拉压强度不等,强度低的部分会先产生开裂、脱层和破坏,随之带来一系列问题。

(5) 几何非线性和物理非线性。复合材料常制成薄壁轻结构,而

且由于其强度大,在载荷作用下允许较大变形,产生非线性(大挠度)问题。由于复合材料的强度刚度和其他性能在提高,结构将设计得更薄,几何非线性问题将变得更重要。

复合材料在整体应变或局部变形较大时,剪切模量和和横向拉压模量这些由基体性能控制的模量会出现明显的物理非线性。以聚合物为基体的复合材料,有时还要考虑粘弹性,在常温下长期受载需要考虑蠕变问题,对于金属基复合材料,还存在弹塑性变形。值得注意的是,湿热现象使物理非线性更为明显。相对航空、航天工程来说,对应用于船舶工程中的复合材料结构湿效应分析显得更为重要。

在实际工程中,复合材料设计、研究往往要遇到各向异性、耦合效应、沿厚度方向剪切效应、拉压性能不等及几何物理非线性等诸多问题,而且这些问题常常又以综合化形式出现,使研究更为复杂。为减小研究难度,目前研究工作大多独立涉及某一方面内容。这样对研究模型的简化处理是有工程应用背景的。在实际结构中,不同情况下的复合材料结构确实只主要呈现某一或某些特定的物理力学特性。当然不仅是具体工艺制作的结果,同时也是人为设计影响所至。在大多数实际设计过程中,为使设计分析成为可能,往往人为设置参数使其处于便于设计分析的状态。显然选用的模型越复杂,结果与实际状态越符合,这样结果是建立在对实际结构力学问题充分认识的基础上,是以加大研究难度为前提的。目前各国针对复合材料结构解析研究大都选择正交异性、特殊铺层(如反对称铺层等)和横向剪切模型进行。为更全面揭示复合材料结构力学特性,本书针对复合材料的各向异性、层合铺设带来的耦合效应、沿厚度方向剪切效应进行综合研究。

### 1.3 复合材料板壳理论及研究方法

经过数十年的发展,至今已提出了多种复合材料板壳理论:经典板壳理论,一阶剪切变形理论,高阶剪切理论(含简化理论),分层理论(含简化理论),三维弹性理论。

板壳经典理论采用克希霍夫假定<sup>[5]</sup>,不考虑沿厚度方向的剪切变形,可以近似求解大部分复合材料薄板壳的力学问题。对于工程中相当多复合材料结构,当其跨厚比较大、沿厚度方向的剪切变形小时,可以忽略剪切影响,这时采用复合材料板壳经典理论,不仅基本方程简单,边界条件简单而且结果也比较精确,而且对于剪切效应弱的结构,采用经典理论计算结果收敛速度要好于其他理论计算结果,本书研究结构也表明这一点。但对自由边边缘效应及其沿厚度方向剪切变形不可忽略的问题,也需要分别采用更精确的理论来计算。

板壳的一阶剪切变形理论<sup>[2,3]</sup>采用变形前板壳中面法线保持直线和沿厚度应变  $\varepsilon_z = 0$  的假定。若采用位移作为未知量来求解,对于任意铺设复合材料层合板,共有 5 个广义位移,而对各向异性平板则有 3 个广义位移,这比经典理论复杂得多。采用一阶剪切理论,需要对剪切刚度合理进行修正<sup>[27]</sup>。对于变形、屈曲载荷和低阶频率的计算,一阶剪切理论已经可以得到相当精确的结果,层间应力求解精度与经典理论大体相当<sup>[45]</sup>。板壳的高阶理论包括具有 11 个位移函数的 LCW 高阶理论<sup>[22]</sup>和具有 5 个广义位移的简化高阶理论<sup>[15,21]</sup>,计算时比经典理论、一阶理论要复杂和困难得多,但比采用三维弹性理论还是要简单一些。高阶理论在计算应力和高阶固有频率时,可得到比经典理论、一阶理论精确得多的结果,于计算变形、临界载荷和低阶频率,也可得到比一阶剪切理论要精确一些的结果,但计算工作量太大,改进不多。

复合材料板壳的分层理论<sup>[8,17]</sup>假定各层面内位移、横向位移为沿厚度的多项式函数,并按实际情况要求层间剪应力及位移连续,可以更好地模拟层合板壳弯曲后横截面的翘曲,从而使精度提高<sup>[27]</sup>。但其未知数个数与层数有关,层数越多计算量越大。即使对于简化分层理论<sup>[23,26,68]</sup>,尽管表面上未知位移函数减少,但具体求解时需要迭代求解转换系数  $\lambda_{ps}^i$ ,计算量也很大。三维弹性理论<sup>[28,63,64]</sup>将复合材料板壳看作三维弹性体,对其位移和应力不再作简化假定,按铺层方向和厚度分别列出每层的三维弹性力学的方程和应力、应变的边界条件

和连续条件,最后联合求解。对于线弹性的复合材料板壳,在层数很少,结构形状加载方式和边界条件都比较简单时,才有采用三维理论求解的可能。比较而言,分层理论较三维弹性理论应用范围及发展前景要深远得多<sup>[27]</sup>。

从研究的方法来看,复合材料研究大致可分为解析法和数值法两类。数值法可分为差分法、有限元法、有限条法、有限层法和边界元法等。数值法在 20 世纪 60 年代末随着计算机技术的发展而突飞猛进。在目前结构设计计算中,数值法充当主力军的作用,并在工程界取得了信誉,特别是有限元技术几乎可在工程计算中包打天下。但数值法的计算量大,而且对于某些特殊问题,数值法并不能给出令人满意的结果,而且结果分析相对困难。用解析法求得的解,其中的几何参数和材料参数是可以变化的,给定一组几何参数和材料参数就可以得到一组解答,对于典型问题,采用解析法便于探讨各种因素及其结果的规律性关系。相反,采用数值法,要系统探讨各种参数的影响和变化规律,由于计算工作量大,数据处理量过大,就不那么方便了。但是由于板壳几何形状的复杂,边界条件的多样性,即使对于各向同性板壳,很多情况下也无法求得解析解,而相应复合材料板壳解析解就更少了。与蓬勃发展的数值法相比,复合材料板壳解析研究要远远落后。而不论是评价近似解和数值解的精度,还是研究结构、材料参数对结构力学性能影响规律,都需要发展复合材料板壳解析研究工作<sup>[79,100]</sup>。本书采用解析法开展复合材料板壳力学研究工作。

从现有板壳理论解析研究可行性及应用价值综合选择,本书选用复合材料经典板壳理论及一阶剪切变形理论解析研究复合材料板壳线弹性结构力学特性,以讨论复合材料的各向异性、耦合效应、沿厚度方向剪切效应对复合材料板壳线弹性力学性能的影响。

## 1.4 复合材料板壳结构解析研究情况

复合材料板壳解析研究已有的成果是有限的。以往可采用的解



析方法可分为三类：纳维叶双傅里叶级数解法体系、列维单级数解法体系、基于分离变量法的一般解析解体系。

1829 年, C. L. M. H. Navier 在送交法国科学院的一篇论文中提出用重级数法解简支矩形板, 开创了纳维叶双傅里叶级数解法体系。纳维叶双傅里叶级数解的基本思路是将位移函数选取为满足边界条件的双傅里叶级数形式<sup>[102]</sup>, 而后将双傅里叶级数形式的位移函数代入控制方程(组), 从而确定待定常数或特征值<sup>[12]</sup>。双傅里叶级数解法简单, 求解特定边界板壳的变形、频率、屈曲载荷简便明了。一般来说双傅里叶级数解法可以用于求解正交异性四边简支矩形薄板、反对称四边简支矩形薄板及基于一阶(简化高阶)剪切理论的四边简支矩形中厚板的弯曲振动屈曲问题, 正交异性、反对称铺设的矩形薄(中厚)扁壳弯曲振动屈曲问题也可由双傅里叶级数法解析求解, 部分成果反映在文献[6, 11 - 13, 17, 18, 21, 23 - 26, 30, 35, 62, 66 - 68]中。配合叠加法思想, 双傅里叶级数法所能求解的正交异性、反对称铺设复合材料板壳边界条件还可有望再广泛一些, 但实施起来要麻烦的多, 求解起来失去了纳维叶双傅里叶级数解法体系特有的简明优点。可惜对于控制方程出现奇次偏导数的板壳力学问题, 纳维叶双傅里叶级数解法体系就无效了。值得注意的是纳维叶双傅里叶级数解法近年来被用来求解正交异性、反对称铺设的复合材料板壳的三维问题<sup>[28, 31, 40, 63, 64]</sup>, 其主要做法是采用将位移函数表示为适当的双傅里叶级数, 然后将位移函数代入三维弹性力学方程, 将偏微分方程组化为关于厚度方向的一维微分方程组, 然后求解该方程组, 从而确定各待定位移函数。显然这种方法所能求解的三维弹性力学问题及其有限, 而且实施起来也存在收敛慢的缺点。

列维单级数解法起源于求解具有一对边简支边界的各向同性薄板弯曲。1899 年 M. Levy 提出承受均布载荷矩形板的单级数解, 这种单级数解被后世称为列维解。列维解可用于求解具有一对边简支边界的各向同性矩形薄板壳的弯曲振动屈曲问题<sup>[102]</sup>, 对于具有一对边简支边界的复合材料矩形板壳, 在正交异性及反对称铺设情况下, 列

维单正弦级数法亦可以来求解薄矩形板壳及中厚矩形板壳,部分成果反映在文献[1,7,9,14,20,30,32,76]中。同样在引进叠加法思想基础上列维单级数法可处理的板壳边界还可不局限于含一对边简支情况,但一样增加了求解的复杂程度。对于弯曲计算来说,列维法比纳维叶法要收敛快得多。在一些特定情况下,列维单级数法思想亦可以用来求解三维弹性力学问题<sup>[59,103]</sup>,其应用的范围同样是很有限的。

一般单级数法实施要比双级数法要复杂一些,处理特征值问题亦没有双级数法简单易行,但列维法可处理的复合材料板壳范围要比纳维叶法广泛一些。然而列维单级数法仍然没有跳出一定边界条件约束、一定铺设方式约束的框框。一般解析解思想就受到人们的格外关注<sup>[69,70,72]</sup>。所谓一般解析解,就是可以依此求解具有一般边界条件、载荷条件的板壳力学问题的解析解。一般解析解摆脱了纳维叶法和列维法只能处理特定条件的局限,处理板壳力学范围无疑又扩大一大步。以往的一般解析解大都建立在分离变量法基础上<sup>[73,74,82]</sup>,能够用分离变量法求解的复合材料板壳只能局限于正交异性及反对称铺设复合材料板壳。

依照已有三种解析体系,只有正交异性及反对称铺设复合材料板壳才能解析求解,工程常用的对称角铺设层合板壳无法实现解析求解,任意铺设复合材料板壳的解析研究同样无法实施,更为复杂的基于剪切变形理论的对称角铺设、任意铺设复合材料板壳解析求解就更难于进行了。复合材料板壳结构解析理论的落后,也限制了复合材料板壳优异性能的充分发挥。而复合材料结构区别金属结构的优势之一就是复合材料结构可根据结构工况改变设计以达到优异设计,理论局限影响对复合材料结构力学性能的认识,影响了相应复合材料层合板设计水平的提高。工程实践表明:合理地选择复合材料层合板壳设计参数,对于提高结构对复杂载荷的承受能力有重要的作用。所幸有限元技术的蓬勃发展使人们对复合材料结构认识及应用设计水平有了更进一步的深入和提高,但有限元法毕竟是数值法,对特殊问题处理及对结构力学特性认识有一定局限性,有限元法不可能完全替代

解析法。因此发展复合材料板壳力学解析理论,建立任意铺设复合材料板壳解析解体系,以便充分研究复合材料结构、材料参数对复合材料结构力学性能的规律,并为有限元等数值法处理复合材料板壳提供评价标准,是迫切的,也是必要的。

从上面的叙述可以看到:一方面,复合材料板壳解析研究对于增强对复合材料结构力学规律认识,并提高复合材料结构设计水平有重大现实意义,而另一方面复合材料板壳解析研究却很有限,对称角铺设、任意铺设薄板壳及基于一阶剪切变形理论的任意铺设复合材料中厚板壳解析求解研究实质上还没有开始,复合材料板壳解析研究目前还是国际力学界研究的空白。依靠原有的纳维叶解、列维解、分离变量法是无法完成复合材料板壳解析研究这一任务的,必须发展新型的弹性力学解析体系。

1992 年作者和导师杨光松<sup>[94,104]</sup>提出一种新型复级数法,建立了各向异性矩形板弯曲、一般解析解,并用来求解各向异性圆板弯曲,给出了各向异性板结构弯曲一般解析解<sup>[95]</sup>,在后续研究中表明这种数学处理方法可以用来处理很多物理力学问题。

## 1.5 本书的主要工作

新型复级数法的提出为克服复合材料板壳力学解析研究领域中的困难提供了可能。反映在本书具体工作内容如下:

(1) 以各向异性矩形板弯曲求解过程为例,给出新复级数法求解单一偏微分方程边值问题的一般过程,并建立了各向异性矩形板、圆形板、斜形板力学问题。在此基础上,结合工程常用的几种复合材料,针对承受均布载荷的板结构进行分析计算,讨论有关结构、材料设计参数对层合板性能的影响,在数值计算基础上,指出现有文献中对铺层数大于 8 的层合板忽略其弯扭耦合效应的处理给内力计算带来较大误差。

(2) 以新型复级数方法建立了各向异性板平面应力问题位移型

一般解析解。

(3) 以求解基于一阶剪切变形理论的对称角铺设矩形板弯曲求解为例,给出新复级数法求解偏微分方程组边值问题的一般过程,并以此首次建立了基于一阶剪切变形理论的对称角铺设矩形板、斜形板力学问题一般解析解,算例结果验证了解的稳定性和收敛性。针对承受均布载荷的四边简支固定、四边固支固定矩形板进行分析计算,讨论了材料各向异性、剪切变形效应及层合板有关设计参数对层合板性能的影响,并比较了在不同情况下的经典理论解与剪切变形理论解的差异,肯定了经典理论在计算薄层合板领域的适用性,指出了应用剪切变形理论计算中厚层合板问题的必要性。

(4) 建立了任意铺设薄矩形板静力响应问题一般解析解,在以算例验证了解析解的收敛性、稳定性后,提出任意铺设矩形层合板的力学对称性、铺层对称性,结合强各向异性、弱各向异性材料,针对承受均布载荷几种边界的矩形层合板进行分析计算,初步讨论层合板有关设计参数对层合板弯曲性能的影响。

(5) 建立了基于一阶剪切变形理论的任意铺设矩形板静力响应一般解析解,进行数值计算验证了解的稳定性和收敛性,提出了基于剪切变形理论的任意铺设矩形板结构力学对称性、铺层对称性,针对承受均布载荷的四边简支固定、四边固支固定矩形板进行分析计算,讨论了剪切变形效应对任意铺设层合板的影响,结合与已完成的经典理论薄任意铺设矩形板同时计算,以比较了在不同跨厚比下层合板计算采用经典理论解与剪切变形理论解的差异,计算结果肯定了经典理论在计算薄层合板领域的适用性,并指出了对中厚层合板应用剪切变形理论是必要的。

(6) 建立了基于克希霍夫理论的任意铺设复合材料薄圆柱壳和基于一阶剪切变形理论的任意铺设圆柱壳静力响应问题一般解析解。并结合强各向异性、弱各向异性材料,针对承受均布载荷的两端简支、两端固支层合圆柱壳进行分析计算,初步讨论层合圆柱壳铺设角、铺设层数、铺设方式等有关设计参数对层合圆柱壳弯曲性能的影响。

(7) 建立了基于经典理论的具有矩形底座任意铺设扁壳静力响应问题一般解析解,并进行数值计算验证了解的稳定性收敛性,数值工作亦表明在扁壳曲率趋向于零时所得解析解数值接近任意铺设矩形板数值。

(8) 建立了各向异性热传导矩形域、斜形域和圆形域稳态问题一般解析解,进行数值计算验证了解的稳定性收敛性。

## 第 2 章 数学力学预备知识

由于工程结构设计的强大需要,固体力学获得了深入发展,以为结构设计提供必要的力学基础。在连续介质、小变形和线弹性条件下,固体力学和数学物理方法已经形成了一整套较为完备的理论体系。本章将本书涉及到的部分弹性力学和数学物理方程基本知识进行了阐述,为节省篇幅只给出结论,具体推导可见相关理论书籍。

### 2.1 弹性力学基础

#### 2.1.1 应力应变分析

在直角坐标系  $OXYZ$  中,弹性体内任一点  $X$  的应力状态可用 6 个

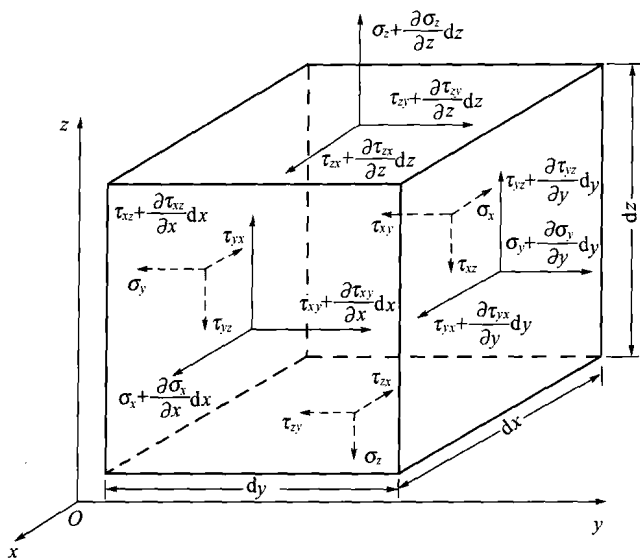


图 2-1 应力单元

应力分量表示:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , 见图 2-1。

应变分量可用 6 个应变分量来表示:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 。

在小变形条件下, 单元体中任一点平行于  $x, y, z$  轴的位移分别是  $u, v, w$  表示, 见图 2-2。

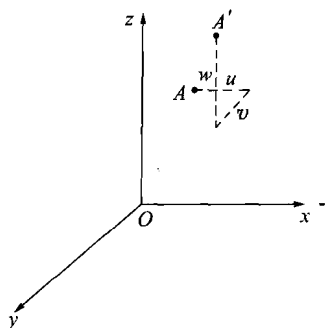


图 2-2 位移图

在小变形情况下, 应变—位移的几何方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2-1)$$

应变分量并不是相互独立的, 它们之间要满足应变协调方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (2-2)$$

根据力平衡原理,设弹性体受到外力作用,其中单位体积的外力为  $X, Y, Z$ , 则应力分量应满足平衡方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right. \quad (2-3)$$

以上方程对任一线弹性、小变形力学问题均适用。

### 2.1.2 应力—应变本构关系

小变形情况,应力—应变关系满足线性胡克定律



$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

式中:  $c_{ij} = c_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 。

当弹性体具有对称的内部结构。如弹性体每一点都存在 3 个互相垂直的弹性对称面,称为正交各向异性体,此时独立的弹性常数为 9 个。这是所有反映拉伸—剪切和剪切—剪切耦合效应的弹性常数为 0,不存在耦合效应。但坐标轴与材料主轴不一致时,弹性系数矩阵变成满阵,存在各种耦合效应。

如物体每一点存在一个各向同性平面,此时独立的弹性常数仅有 5 个。在  $Z$  轴与弹性对称轴一致,本构方程可简化。对于材料为各向同性时,这时应力应变关系为熟知的各向同性体胡可定律。

### 2.1.3 边界条件

对于弹性力学问题,存在边界约束条件。

对于给定边界力( $X, Y, Z$ ),力边界条件是

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = X \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = Y \\ \tau_{zx} l + \tau_{xy} m + \sigma_z n = Z \end{cases} \quad (2-5)$$

对于给定边界位移( $u, v, w$ ),位移边界条件是

$$\begin{cases} u = u \\ v = v \\ w = w \end{cases} \quad (2-6)$$

在实际问题中,边界条件一般都包括力边界和位移边界条件。对

于动力学问题,还在初始条件。

#### 2.1.4 弹性力学方程定解问题

弹性力学平衡问题在给定区域内有 15 个基本方程: 3 个力学平衡方程, 6 个小变形条件的表示应变—位移的几何方程, 6 个表示应力—应变关系的物理方程。

要确定弹性力学问题, 还要给出定解条件, 即边界条件和初始条件。边界条件一般有位移边界条件和给定位移边界条件两种。

有了力学控制方程组及边界条件, 剩下的问题是如何求解。偏微分方程组的求解十分困难, 对三维力学问题、复杂边界力学问题, 解析求解十分困难。从解析求解角度, 原则上对规则边界的区域力学问题求解难度小一些。为了便于解决问题, 人们从不同角度对弹性力学问题进行简化。

#### 2.1.5 对弹性力学边界问题的简化

对于弹性力学精确解, 不同边界条件给出的解也是不同的。但实际问题中许多问题难以精确地知道边界力的分布。同时, 即使能精确知道边界力分布, 数学处理也很困难。为克服这一困难, 法国力学家圣维南 1855 年提出了著名的圣维南原理: 如在弹性体上任何部分作用一平衡力系, 则这个平衡力系在弹性体内所引起的应力和变形局限于平衡力系作用域的附近区域, 所引起的应力和变形随着作用域而迅速减少。这样在处理边界力问题时, 可以用静力等效力系来代替原来的表面力进行求解。这样在数学上、物理上均为求解给出了可能性。弹性力学存在解的唯一性定理。满足全部弹性力学方程及边界条件的解的应力状态与应变状态是唯一的; 如果支承完全约束了的弹性体的刚性位移, 则位移也是唯一的。

#### 2.1.6 对板壳结构物理模型的简化

对于板壳结构, 物理上看横向尺寸明显大于厚度, 这就为将三维

的板壳结构简化为二维的板壳结构理论提供了基础。

作用于平板的外载荷可以分解为两种分量：① 作用于板中面的载荷分量，对各向同性板将给出板平面应力问题，但对复合材料结构因耦合效应将引起复杂的响应；② 垂直于中面的载荷分量，对各向同性板将引起板的弯曲。

### 1. 板壳克希霍夫理论体系

克希霍夫理论做出了如下假设：

(1) 中面法线变形后仍垂直于中面，且长度保持不变；这一假设通常称为直法线假设。

(2) 板中垂直于中面的应力分量远小于面内应力分量；

(3) 微小应变、微小挠度（相对于板的厚度）。

这样几何方程变为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2-7)$$

针对板的力学特点，建立板的力学单元体——一个微小的平行六面体，三边程度分别为  $dx$ ,  $dy$  和  $h$ ，如图 2-3 所示。

定义引入单位长度的内力矩和横向剪力板中面的内力和以下参数：

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \\ Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \end{cases} \quad (2-8)$$

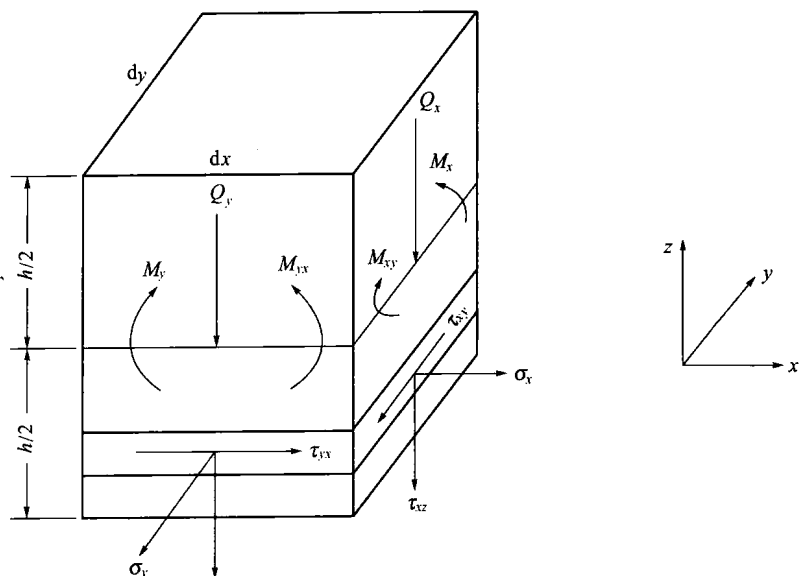


图 2-3 板的力学单元体

根据板的平衡原理,可得到板平衡方程

$$\begin{cases} Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \end{cases} \quad (2-9)$$

将式(2-9)前2式带入第3式,可得薄板偏微分方程。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (2-10)$$

对于各向同性板可得

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q \quad (2-11)$$

对于复合材料层合板壳结构,需要引入拉伸刚度  $A$ 、耦合刚度  $B$ 、

弯曲刚度  $D$ 。

$$\begin{cases} A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz & (i, j = 1, 2, 6) \\ B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz & (i, j = 1, 2, 6) \\ D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz & (i, j = 1, 2, 6) \end{cases} \quad (2-12)$$

式中:  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  ——  $\theta^k$  铺层的刚度系数。

根据板的边界约束情况,薄板理论定义了几种典型的边界条件:

(1) 固支边  $w=0, \frac{\partial w}{\partial n}=0$

(2) 简支边  $w=0, M_n=0$

(3) 自由边  $M_n=0, V_n=0$

在  $V_n=0$  的引入时,引入了圣维南原理,用静力等效的综合剪力和角点力等效描述三个力学量的状态。

克希霍夫理论假设基础是:①板位移只发生横向挠度,平面内位移只是发生垂直中面的转动,厚度方向刚性很大;②板单位从总体上满足力平衡条件。这样就把本是三维问题的平板弯曲问题变成了二维经典板力学问题。该理论要能成功符合实际情况的话,板的刚度要大,厚度要薄,同时变形比较小。这种情况在实际工程还是有基础的,所以该理论受到了广泛的重视。克希霍夫理论在力学发展历程上具有重要地位,也被称为经典理论。

## 2. 板壳赖斯勒一阶剪切理论体系

克希霍夫理论假设板刚性大,没有考虑横向剪切变形的影响,这样它预测的挠度偏低,且板厚越大、材料刚性越低偏差越大,特别是对厚度效应敏感的模量比高的复合材料叠层板。赖斯勒理论对克希霍夫理论进行了修正,放松了变形前垂直于中面的直线在变形后仍垂直于中面的假设,认为平面内位移是独立于挠度的变量,且是  $z$  方向的一阶函数,导致了三个广义位移:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\varphi(x, y) \\ v(x, y, z) = z\psi(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2-13)$$

还是采用经典板理论的推导模式, 可得赖斯勒理论的控制偏微分方程组和边界条件。

$$\begin{bmatrix} L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

式中:

$$L_{33} = - \left( k_1^2 A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k_1 k_2 A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_2^2 A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$L_{34} = - \left( k_1^2 A_{55} \frac{\partial}{\partial x} + k_1 k_2 A_{45} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_{35} = - \left( k_1 k_2 A_{45} \frac{\partial}{\partial x} + k_2^2 A_{44} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_{44} = - k_1^2 A_{55} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{45} = - k_1 k_2 A_{45} + D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{55} = - k_2^2 A_{44} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\text{其中: } A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \quad (i, j = 4, 5);$$

$k_1, k_2$ ——克服满足剪力在板壳表面为 0 的实际情况而引入的修正系数<sup>[81]</sup>。

由于引入独立的转交函数, 该理论的边界转角约束可直接用转角函数描述。该方程组是六阶方程组, 每个边界可有 3 个约束条件, 对

于自由边界条件,就可独立用弯矩,扭矩来描述,不需引入综合剪力的概念。

赖斯勒理论相对于克希霍夫理论在板壳物理模型的描述上是一个进步,但也有改进的余地,比如它假设平面内位移是 $z$ 方向的一阶函数就是一个局限,很多理论在这一角度上进行了修正,提出了一阶 $Z$ 形理论,高阶理论,分层假设理论等。同时也要看到理论越精确,分析计算也越复杂。对弹性体力学架构研究,提出符合工程实际力学理论模型,虽不是本书后续内容重点,但确是力学研究中的重点问题,读者要给予高度关注。

本章以上内容建立在笛卡儿直角坐标系中的,对于极坐标、圆柱坐标系统、球坐标下弹性力学方程,可以坐标变换得到,本书不再一一列出。

## 2.2 数理方程基础

在对弹性力学问题进行物理模型建立—数学模型建立后,就获得弹性力学控制方程,求解在给定力学边界问题(对与时间有关的力学问题,还有初始条件)后,就可确定弹性力学问题,这在数学上被称为偏微分方程的定解问题。下面概述一下偏微分方程的基本知识。

### 2.2.1 偏微分方程的基本概念

数学上将含有未知函数是多元函数及其偏导数(或仅含偏导数)的微分方程称为偏微分方程。偏微分方程中包含最高阶导数的阶数称为方程的阶数。无疑薄板克氏控制方程为四阶偏微分方程。若偏微分方程的因变数及其偏导数均为一次式,则称该偏微分方程为线性偏微分方程,反之称为非线性偏微分方程。

引入线性偏微分算子 $L$ 。则线性偏微分方程可表述为:

$$L[w] = F$$

线性偏微分方程有如下性质:

(1) 如  $w = w_1 + w_2$ , 则  $L[w_1 + w_2] = L[w_1] + L[w_2]$ 。

(2) 如  $w^* = 0$  是齐次方程  $L[w] = 0$  的通解,  $w^{**}$  是  $L[w] = F$  的特解, 则  $w = w^* + w^{**}$  是非齐次方程  $L[w] = F$  的通解。

(3) 如  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots$  是  $L[w] = F$  的特解, 则  $w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + \dots + c_n w_n$  是  $L[w] = F$  的解。

线性偏微分工程的特性将直接用于弹性力学问题定解问题的求解中。

## 2.2.2 傅里叶级数方法

傅里叶级数经常应用于偏微分方程定解问题求解。

### 1. 正交性的数学定义

设  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  是  $[a, b]$  上可积实函数, 若

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx \begin{cases} = 0 (m \neq n) \\ \neq 0 (m = n) \end{cases}$$

则说  $\{\varphi_n(x)\}$  是  $[a, b]$  上的正交系。

对于  $l > 0$  情况,  $l, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$  是  $[-l, l]$  上的正交系。

函数  $l, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots$  是  $[0, l]$  上的正交系。

函数  $\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$  是  $[0, l]$  上的正交系。

### 2. 傅里叶级数

假设  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上可积, 计算

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots)$$



那么三角级数  $0.5a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$  为  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上的傅里叶级数。记为

$$f(x) \sim 0.5a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

特别地,若函数  $f(x)$  定义在  $[0, 1]$ , 可将  $f(x)$  延拓至  $[-l, l]$  上的奇函数, 这时

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

同样,若函数  $f(x)$  定义在  $[0, 1]$ , 也可将  $f(x)$  延拓至  $[-l, l]$  上的偶函数, 这时

$$f(x) \sim 0.5a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

### 3. 傅里叶级数的复数形式

引入欧拉公式

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{\frac{-in\pi x}{l}}}{2}, \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{\frac{-in\pi x}{l}}}{2i}$$

则有

$$f(x) \sim 0.5a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{\frac{-in\pi x}{l}} \right)$$

记

$$c_0 = 0.5a_0, c_n = 0.5(a_n - ib_n), c_{-n} = 0.5(a_n + ib_n)$$

则有

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) e^{\frac{-in\pi u}{l}} du \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

## 第3章 对称角铺设薄层合 矩形板力学解析

由于复合材料叠层结构中的各单层板具有各向异性,复合材料叠层结构通常存在弯扭耦合、拉剪耦合、拉弯耦合,对称角铺设层合板结构在横向弯曲状态下只存在弯扭耦合效应,分析设计相对要容易一些,同时这种铺设层合板有较大的剪切刚度和扭曲刚度,所以对称角铺设层合板在实际工程中应用比较广泛。但即使这样,由于其弯曲控制方程中含有挠度函数关于空间坐标的奇次交叉偏导数,原先亦无法解析研究这类板力学状态,近年来这类铺设板的解析求解方法才获得发展。本章采用复级数方法给出解析解,针对承受均布载荷四边简支纤维增强对称角铺设复合材料矩形板弯曲进行解析计算,在考虑弯扭刚度及忽略弯扭刚度两种状态下分别进行计算处理,以讨论弯扭耦合对层合板弯曲强度性能的影响。原先工程中常在铺设层数  $N$  较多(如  $N > 8$ )情况下忽略弯扭刚度影响,本章亦讨论这种处理方法的适应范围及可能的误差。

### 3.1 弯曲问题理论分析

考虑对称角铺设纤维增强复合材料矩形板,板长为  $a$ ,板长为  $b$ ,厚度为  $h$ 。板在四边边界简支支撑,板面承受横向载荷  $q$ ,  $w(x, y)$  为挠度函数,  $D_{i,j}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, 6$ ) 为弯曲刚度矩阵单元。

对称角铺设纤维增强复合材料板横向弯曲控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} +$$

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = P \quad (3-1)$$

本章引入了如下无量纲量

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad W(x, y) = \frac{w(x, y)}{h}, \quad P = \frac{qa^4}{h}$$

各向异性板弯曲问题可归结为求解偏微分方程式(3-1)的边界值问题。

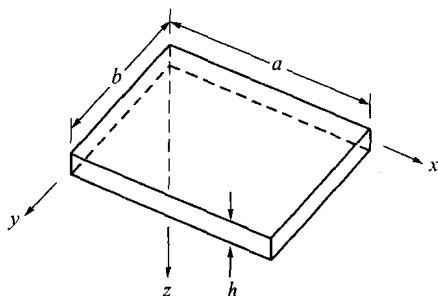


图 3-1 矩形板示意图

求解思路如下：直接从控制方程出发，建立偏微分方程的一般解，将求解的一般解带入边界条件，根据正弦级数的正交性建立一组线性方程，从而确定待定常数，具体过程如下。

### 1. 齐次解及补充解推导

假设控制方程式(3-1)有如下级数解：

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (3-2)$$

式中： $i^2 = -1$ ；

$m$ ——整数。

将式(3-2)带入式(3-1)的齐次方程，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ D_{11}(m\pi)^4 - 4iD_{16}\alpha(m\pi)^3 \frac{\partial f}{\partial \eta} - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2(m\pi)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 4iD_{26}\alpha^3(m\pi) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4} \right\} = 0 \quad (3-3)$$

(1) 当  $m=0$ ,  $W=f_1+f_2(\eta-0.5)+f_3(\eta-0.5)^2+f_4(\eta-0.5)^3$

(2) 当  $m \neq 0$ , 再假设

$$f_m(\eta) = Ge^{im\alpha\eta} \quad (3-4)$$

式中:  $m$  不等于 0;

$G$ ——待定复数;

$r$ ——特征根。

将下式(3-2)和下式(3-4)带入下式(3-1)的齐次方程下式(3-3), 导出下式

$$D_{11} + 4D_{16}r\alpha + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2r^2 + 4D_{26}\alpha^3r^3 + D_{22}r^4\alpha^4 = 0 \quad (3-5)$$

求解式(3-5), 对于各向异性材料板, 可得 4 个特征根

$$a_k \pm ib_k \quad (k=1, 2) \quad (3-6)$$

按照本书附录, 可推出以实数形式解

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{1km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{2km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin(m\pi(a_k\eta + \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{3km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos(m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{4km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos(m\pi(a_k\eta + \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} \quad (3-7) \end{aligned}$$

式中:  $G_{jkm}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ;  $k=1, 2$ )——任意待定常数。

当  $m$  为 0 时, 可推出补充多项式

$$W = f_1 + f_2(\eta - 0.5) + f_3(\eta - 0.5)^2 + f_4(\eta - 0.5)^3 \quad (3-8)$$

考虑到一般情况, 又可设如下级数解

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Qe^{im\alpha\xi} e^{im\alpha\eta} \quad (3-9)$$

式中:  $n$ ——整数,  $n \neq 0$ ;

$Q$ ——虚数;

$s$ ——特征根。

采用以上步骤,可推出另一特征方程(3-10)及其4个特征根式(3-11)

$$D_{11}s^4 + 4D_{16}s^3\alpha + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2r^2 + 4D_{26}s\alpha^3 + D_{22}\alpha^4 = 0 \quad (3-10)$$

$$c_k \pm d_k i \quad (k = 1, 2) \quad (3-11)$$

同样可推得另一级数解

$$\begin{aligned} W^* = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{1kn} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin(n\pi(c_k(1-\xi) + 1-\eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{2kn} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin(n\pi(c_k \xi + \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{3kn} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos(n\pi(c_k(1-\xi) + 1-\eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{4kn} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos(n\pi(c_k \xi + \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} \quad (3-12) \end{aligned}$$

当  $n$  为 0 时,可得出另一补充解

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3(\xi - 0.5)^2 + g_4(\xi - 0.5)^3 \quad (3-13)$$

## 2. 特解

根据载荷形式可以由式(3-1)推出特解。对于均布载荷  $q$ , 特解  $W_0$  可给出如下形式:

$$W_0 = \frac{P}{50} \left( \frac{\xi^2(1-\xi)^2}{D_{11}} + \frac{\eta^2(1-\eta)^2}{D_{22}\alpha^4} + \frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{4(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2} \right) \quad (3-14)$$

## 3. 构建一般解

根据线性偏微分方程解的可叠加性原理,可将齐次解、特解、补充

解及以  $\xi, \eta$  表示的交叉多项式组合起来,可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{1km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{2km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{1kn} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{2kn} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
 & t_1(\eta(\xi - \xi^3) + t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_2((1-\eta)(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_3(\eta(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) - t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_4((1-\eta)(\xi - \xi^3) - t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_5(\xi(\eta - \eta^3) + t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_6((1-\xi)(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_7(\xi(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) - t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_8((1-\xi)(\eta - \eta^3) - t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\
 & t_9(1-\xi)(1-\eta) + t_{10}\eta(1-\xi) + t_{11}\xi(1-\eta) + t_{12}\xi\eta + W_0
 \end{aligned}$$

(3-15)

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn}$  ( $k=1, 2$ );

$t_j$  ( $j=1, 2, \dots, 12$ )——待定常数;

$W_0$ ——特解;

$$t_{16} = \frac{3D_{16}}{(D_{12} + 2D_{66})\alpha}; \quad t_{26} = \frac{3\alpha D_{26}}{(D_{12} + 2D_{66})}.$$

#### 4. 边界条件

简支边界、固支边界和自由边界可表示为

$$S: w = M_x = 0$$

$$C: w = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$F: Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = M_x = 0$$

## 5. 角点条件

在上述的解析解中,引入多项式形式的补充解可以处理复杂的边界问题。由于正弦级数在边界端点间断,需要补充角点条件。下面给出一些典型的角点条件。

### (1) 四边固支板

$$\begin{aligned} w(0,0) = 0, \quad w(1,0) = 0, \quad w(1,1) = 0, \quad w(0,1) = 0 \\ \frac{\partial W(0,0)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial W(1,0)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial W(1,1)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial W(0,1)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial W(0,0)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial W(1,0)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial W(1,1)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial W(0,1)}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

### (2) 四边简支板

$$\begin{aligned} w(0,0) = 0, \quad w(1,0) = 0, \quad w(1,1) = 0, \quad w(0,1) = 0 \\ M_x(0,0) = 0, \quad M_x(1,0) = 0, \quad M_x(1,1) = 0, \quad M_x(0,1) = 0, \\ M_y(0,0) = 0, \quad M_y(1,0) = 0, \quad M_y(1,1) = 0, \quad M_y(0,1) = 0 \end{aligned}$$

对于悬壁板问题,每一个自由角点处的综合剪力和双向弯矩也构成了3个角点条件。

实际计算中,设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解(3-15)共有  $12M+12$  个未知数。对于矩形板弯曲问题,共有8个独立的边界条件。将解析解代入8个边界条件中,形成8个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数,可以得到  $8M$  个线性代数方程;在4个角点  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有12个角点条件,又可建立12个线性方程,这样总共建立  $8M+12$  个线性方程,对称角铺设纤维增强复合材料矩形板横向弯曲问题得解。



## 3.2 弯曲数值部分

### 1. 验证计算

为了检验解析解的收敛性和稳定性,首先选用石墨环氧材料进行计算验证,材料参数如下:

$$E_1 = 40\text{GPa}, E_2 = 1\text{GPa}, G_{12} = 0.6\text{GPa}, \gamma_{12} = 0.25$$

针对均布载荷  $q$  四边简支层合方板,层合板有 9 层,  $a/h = 100$ 。计算结果反应在表 3-1 中。参考解是 Noor 和 Mathers 用有限元计算而得的,考虑了两种铺设角。计算结果表明本书解与参考解相当接近,而且中心挠度随着级数项数增加很快收敛,表明本解析解收敛性很好。

表 3-1 板中心无量纲挠度 ( $\bar{W} = 10^3 w E_2 h^3 / q b^4$ )

铺 设 角	$\bar{W}$ 模 型	$a/h$	100
各向异性 ( $\theta = 45^\circ$ )	本书解	$M = 20$	2.4502
		$M = 30$	2.4501
		$M = 40$	2.4500
		参考解	2.4079
各向异性 ( $\theta = 30^\circ$ )	本书解	$M = 20$	2.7479
		$M = 30$	2.7478
		$M = 40$	2.7478
		参考解	2.7000

以上数值验证表明,本书解与已有解析结果符合很好,并具有很好的稳定性和收敛性,可以用来解析分析各向异性薄板静力问题。

### 2. 计算分析

下面按照上述方法进行数值计算,以研究弯扭耦合对层合板弯曲强度的影响。

本书选择 5 种复合材料进行分析。其材料参数见表 3-2。

表 3-2 复合材料的工程参数

牌 号	材 料	$E_x/\text{GPa}$	$E_y/\text{GPa}$	$G_{xy}/\text{GPa}$	$\gamma_{12}$
T300/5208	碳环氧	181	10.3	7.17	0.28
B(4)/5505	硼环氧	204	18.5	5.79	0.23
AS/3501	碳环氧	138	8.96	7.10	0.30
斯考契 1002	玻璃环氧	38.6	8.27	4.14	0.26
Kevlar4/环氧	芳纶环氧	76	5.5	2.3	0.34

本书给出表 3-3 ~ 表 3-7 分别考察四边简支 (SSSS) 方板最大挠度。取  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = 10^4\text{N/m}^2$ , 计算中取  $M = 60$ 。

表 3-3 T300/5208 的 SSSS 方板中心挠度  $10^3 wD_{11}/q$ 

$\theta/(\circ)$ $N$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$
5	8.573	8.194	7.289	6.407	5.918	5.857
7	8.573	8.086	7.020	6.068	5.564	5.501
9	8.573	8.041	6.915	5.940	5.433	5.369
11	8.573	8.019	6.862	5.877	5.368	5.305
13	8.573	8.006	6.833	5.841	5.332	5.269
15	8.573	7.998	6.814	5.819	5.310	5.247
17	8.573	7.992	6.802	5.805	5.295	5.232
21	8.573	7.986	6.787	5.787	5.277	5.214
79	8.573	7.974	6.761	5.756	5.246	5.183
*	8.573	7.973	6.759	5.754	5.244	5.181

\* 为忽略弯扭刚度的计算结果,下同

表 3-4 B(4)/5505 的 SSSS 方板中心挠度  $10^3 wD_{11}/q$ 

$\theta/(\circ)$ $N$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$
5	13.85	13.08	11.37	9.813	8.989	8.886
7	13.85	12.92	10.99	9.362	8.526	8.423

(续)

$\theta/(^{\circ})$ $N$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$45^{\circ}$
9	13.85	12.86	10.85	9.188	8.351	8.247
11	13.85	12.82	10.77	9.103	8.265	8.161
13	13.85	12.80	10.73	9.055	8.216	8.113
15	13.85	12.79	10.70	9.025	8.186	8.063
17	13.85	12.78	10.69	9.005	8.166	8.063
21	13.85	12.77	10.67	8.981	8.142	8.039
79	13.85	12.76	10.63	8.938	8.099	7.996
*	13.85	12.75	10.63	8.935	8.096	7.993

表 3-5 AS/3501 的 SSSS 方板中心挠度  $10^3 wD_{11}/q$ 

$\theta/(^{\circ})$ $N$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$45^{\circ}$
5	9.350	8.968	8.058	7.161	6.655	6.589
7	9.350	8.861	7.783	6.803	6.276	6.209
9	9.350	8.817	7.675	6.667	6.134	6.067
11	9.350	8.795	7.621	6.600	6.064	5.998
13	9.350	8.782	7.590	6.562	6.025	5.958
15	9.350	8.773	7.571	6.539	6.001	5.934
17	9.350	8.768	7.558	6.523	5.985	5.918
21	9.350	8.761	7.543	6.504	5.966	5.899
79	9.350	8.750	7.516	6.471	5.932	5.865
*	9.350	8.749	7.514	6.469	5.929	5.862

表 3-6 斯考契 1002 的 SSSS 方板中心挠度  $10^3 wD_{11}/q$ 

$\theta/(^{\circ})$ $N$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$45^{\circ}$
5	23.43	22.64	20.82	19.03	18.00	17.87
7	23.43	22.53	20.51	18.58	17.50	17.37

(续)

$\theta/(^{\circ})$ $N$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$45^{\circ}$
9	23.43	22.48	20.38	18.40	17.31	17.16
11	23.43	22.46	20.31	18.31	17.21	17.06
13	23.43	22.44	20.27	18.26	17.15	17.01
15	23.43	22.43	20.25	18.23	17.11	16.97
17	23.43	22.43	20.23	18.21	17.09	16.95
21	23.43	22.42	20.21	18.18	17.06	16.92
79	23.43	22.41	20.18	18.13	17.01	16.87
*	23.43	22.41	20.18	18.13	17.01	16.86

表 3-7 Kevlar49 的 SSSS 方板中心挠度  $10^3 wD_{11}/q$ 

$\theta/(^{\circ})$ $N$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$45^{\circ}$
5	10.98	10.43	9.159	7.957	7.332	7.252
7	10.98	10.29	8.838	7.578	6.923	6.841
9	10.98	10.24	8.711	7.426	6.769	6.687
11	10.98	10.21	8.649	7.352	6.694	6.612
13	10.98	10.19	8.613	7.311	6.651	6.570
15	10.98	10.18	8.591	7.285	6.625	6.544
17	10.98	10.18	8.576	7.267	6.608	6.526
21	10.98	10.17	8.558	7.246	6.587	6.505
79	10.98	10.15	8.526	7.210	6.550	6.469
*	10.98	10.15	8.524	7.207	6.547	6.466

板内最大弯矩  $M_{\max} = 0.5(M_x + M_y) + \sqrt{(M_x - M_y)^2 \cdot 0.25 + M_{xy}^2}$ 。

表 3-8 ~ 表 3-12 给出板中心最大弯矩值。

表 3-8 T300/5208 的 SSSS 方板中心最大弯矩  $M_{\max}/(qab)$

$\theta/(^{\circ})$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
9	0.1216	0.1082	0.08563	0.06174	0.04749	0.04387
13	0.1216	0.1114	0.08387	0.06103	0.04504	0.04253
17	0.1216	0.1091	0.08355	0.06012	0.04422	0.04058
21	0.1216	0.1087	0.08317	0.05972	0.04381	0.04003
79	0.1216	0.1096	0.08299	0.05935	0.04270	0.03732
*	0.1216	0.1094	0.08294	0.05930	0.04261	0.03642

表 3-9 B(4)/5505 的 SSSS 方板中心最大弯矩  $M_{\max}/(qab)$

$\theta/(^{\circ})$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
9	0.1247	0.1122	0.08296	0.06185	0.04776	0.04386
13	0.1247	0.1120	0.08375	0.05980	0.04487	0.04243
17	0.1247	0.1116	0.08327	0.05945	0.04402	0.04056
21	0.1247	0.1111	0.08322	0.05913	0.04340	0.03984
79	0.1247	0.1106	0.08264	0.05869	0.04249	0.03743
*	0.1247	0.1105	0.08265	0.05867	0.04242	0.03662

表 3-10 AS/3501 的 SSSS 方板中心最大弯矩  $M_{\max}/(qab)$

$\theta/(^{\circ})$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
9	0.1178	0.1050	0.08329	0.06166	0.04807	0.04576
13	0.1178	0.1067	0.08261	0.06035	0.04536	0.04215
17	0.1178	0.1049	0.08178	0.05978	0.04454	0.04132
21	0.1178	0.1053	0.08182	0.05962	0.04394	0.04039
79	0.1178	0.1033	0.08149	0.05911	0.04295	0.03767
*	0.1178	0.1025	0.08142	0.05908	0.04287	0.03677

表 3-11 斯考契 1002 方板中心最大弯矩  $M_{\max}/(qab)$ 

$\theta/(\circ)$ $N$	0°	10°	20°	30°	40°	45°
9	0.09196	0.08539	0.07039	0.05734	0.4743	0.04507
13	0.09196	0.08573	0.07117	0.05666	0.04555	0.04370
17	0.09196	0.08580	0.07145	0.05619	0.04502	0.04246
21	0.09196	0.08571	0.07089	0.05604	0.04461	0.04166
79	0.09196	0.08510	0.07086	0.05577	0.04389	0.03990
*	0.09196	0.08509	0.07086	0.05573	0.04382	0.03921

表 3-12 Kevlar49 的 SSSS 方板中心最大弯矩  $M_{\max}/(qab)$ 

$\theta/(\circ)$ $N$	0°	10°	20°	30°	40°	45°
9	0.1236	0.1150	0.08620	0.06228	0.04788	0.04445
13	0.1236	0.1122	0.08419	0.06101	0.04542	0.04301
17	0.1236	0.1109	0.08434	0.06014	0.04455	0.04100
21	0.1236	0.1107	0.08351	0.05984	0.04405	0.04039
79	0.1236	0.1103	0.08340	0.05950	0.04301	0.03779
*	0.1236	0.1103	0.08342	0.05946	0.04293	0.03693

又针对另两种各向异性程度不同的各向异性材料进行分析计算

材料 1:  $E_1/E_2=40$ ,  $G_{12}/E_2=0.6$ ,  $G_{23}/E_2=0.5$ ,  $\gamma_{12}=0.25$

材料 2:  $E_1/E_2=10$ ,  $G_{12}/E_2=0.33$ ,  $G_{23}/E_2=0.27$ ,  $\gamma_{12}=0.3$

计算结果反映在图 3-2 ~ 图 3-4 中。

### 3. 数值分析结论

分析表 3-2 ~ 表 3-12 及图 3-2 ~ 图 3-4, 可以得到以下结论:

(1) 弯扭耦合效应增大了板挠度: 比较表 3-2 ~ 表 3-12、图 3-4 可发现, 对于同一厚度, 铺设层数加大, 在同一铺设角下板挠度不同程度地下降, 铺设层数增大减小了  $D_{16}$ 、 $D_{26}$ , 弯扭耦合效应减弱。不同复合材料结构弯扭耦合效应增大挠度的程度不同, 对于本书所选 5

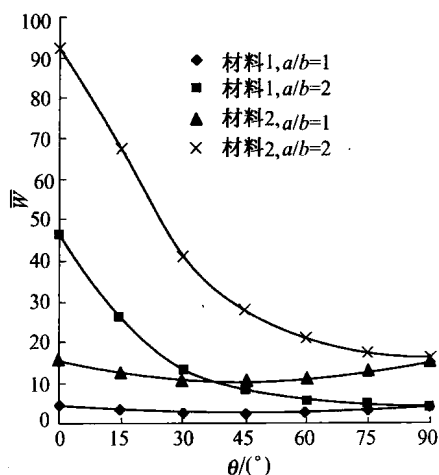


图 3-2 承受均布载荷的四边简支 $[\theta^{\circ}/-\theta^{\circ}/\theta^{\circ}/-\theta^{\circ}]$ 层合板  
中心无量纲挠度随铺设角变化

$$(h/a=0.01, b=1\text{m}; \bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q b^4)$$

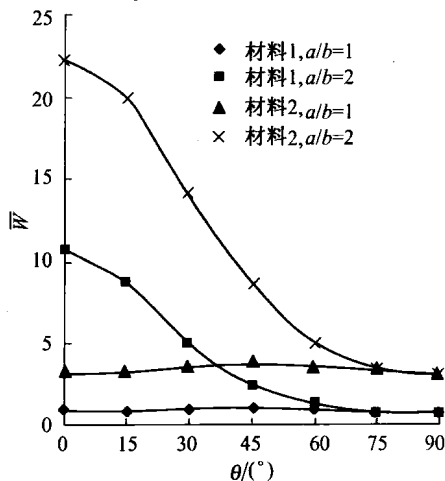


图 3-3 承受均布载荷的四边固支 $[\theta^{\circ}/-\theta^{\circ}/\theta^{\circ}/-\theta^{\circ}]$ 层合板  
中心无量纲挠度随铺设角变化

$$(h/a=0.01, b=1\text{m}; \bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q b^4)$$

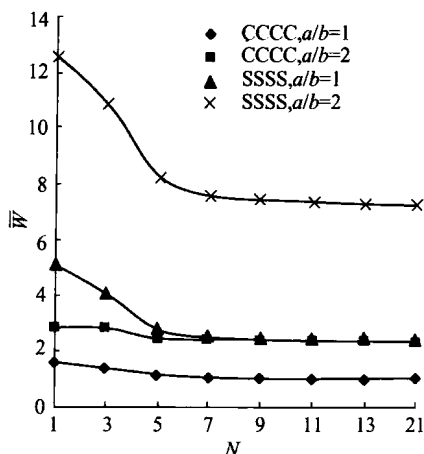


图 3-4 承受均布载荷  $q$  的  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$  层合板

中心无量纲挠度随铺设层数变化(层合板材料为

材料 1;  $h/a=0.01$ ,  $b=1\text{m}$ ,  $\theta=45^\circ$ ;  $\bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q b^4$ )

种复合材料来看,5 层  $45^\circ$ 板最大挠度与 79 层  $45^\circ$ 板最大挠度之比,均为 1.1 左右。一般各向异性程度越高,弯扭耦合效应对板挠度的增大越明显。

(2) 弯扭耦合效应增大板弯矩内力: 比较表 3-7~表 3-12,对于同一铺设角,对同一厚度铺设层数减少,弯扭耦合效应增强,相应板最大弯矩在增大。同样各向异性程度越高,弯扭耦合效应对板弯矩内力的增大越明显,对于本书所选 5 种复合材料来看,5 层  $45^\circ$ 板最大弯矩与 79 层  $45^\circ$ 板最大弯矩之比在 1.2 左右。

(3) 从表 3-3~表 3-12、图 3-2 和图 3-3 发现铺设角  $\theta$  对对称角叠层板挠度、弯矩有重大影响: 从表 3-2~表 3-12,可看出,对于 SSSS 方板,板挠度、最大弯矩都在铺设角  $\theta$  为  $45^\circ$  时最小,一般在铺设角  $\theta$  为  $0^\circ$  时二者升为最大。对于本书所选 5 种复合材料来看,79 层  $0^\circ$ 板最大挠度与 79 层  $45^\circ$ 板最大挠度之比,按玻璃环氧、AS/3501、T300/5208、Kevlar/49 环氧、B(4)/5505 依次为 1.40、1.59、1.66、1.70、1.73;79 层  $0^\circ$ 板最大弯矩与 79 层  $45^\circ$ 板最大弯矩之比,按玻璃环氧、AS/3501、Kevlar/49 环氧、T300/5208、B(4)/5505 依次为 2.30、



3.12、3.24、3.26、3.33。材料各向异性程度越大,铺设角对弯曲强度影响程度越大,由此可见玻璃环氧各向异性程度最低,而硼环氧各向异性程度最大。从表3-2~表3-12发现,即使忽略弯扭刚度,挠度弯矩亦存在类似的规律,可见铺设角影响板弯曲的程度要大于弯扭耦合影响程度。

(4) 铺设层数  $N$  增大时弯扭刚度影响不能轻易忽略:一般铺设层数增大板挠度弯矩减小。有些文献认为当  $N > 8$  时可忽略弯扭刚度的影响,表3-2~表3-7说明,对于挠度计算这种简化是可行的,对于本书所选的5种材料结构,由此带来的相对误差  $(W_9 - W^*)/W^*$  (注1)均不足4%。但对于弯矩计算,所带来的弯矩相对误差  $(M_{\max(9)} - M_{\max(*)})/M_{\max(*)}$  (注1) T300/5208、B(4)/5505、AS/3501、玻璃环氧、Kevlar/49 环氧依次为 20.4%、17%、24.4%、17.4%、20.6%,即使对于21层板,弯矩相对弯矩相对误差  $(M_{\max(21)} - M_{\max(*)})/M_{\max(*)}$ ,按 T300/5208、B(4)/5505、AS/3501、玻璃环氧、Kevlar/49 环氧依次为 9.9%、8.8%、9.9%、6.3%、9.3%,可见弯矩内力计算不能轻易忽略弯扭刚度。鉴于弯矩内力对弯扭刚度较为敏感,建议内力计算中考虑弯扭刚度进行。说明:  $W_9$ 、 $M_{\max(9)}$  为9层板挠度、最大弯矩,  $W^*$ 、 $M_{\max(*)}$  为忽略弯扭刚度时计算所得挠度、最大弯矩。

### 3.3 对称角铺设薄层合矩形板屈曲解析

薄板的屈曲问题是薄板设计中经常遇到的问题,其求解本身就要比横向弯曲问题复杂得多。对于各向异性板,其屈曲问题的求解更为复杂。本节将复级数方法用于求解对称角铺设薄层合矩形板屈曲问题,给出了求解这类问题的级数解法。本节讨论的屈曲问题属于小挠度范围,只讨论如何求解薄板的临界载荷。

#### 1. 直角坐标系下的屈曲问题控制方程

在纵向压力、剪力作用下的对称角铺设薄层合矩形板(图3-5)屈曲控制方程可表示为下式:

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + \\
& D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3-16}$$

式中:  $N_x, N_y, N_{xy}$  为薄板单位宽度上作用的  $x$  方向、 $y$  方向均匀压力, 剪切力。

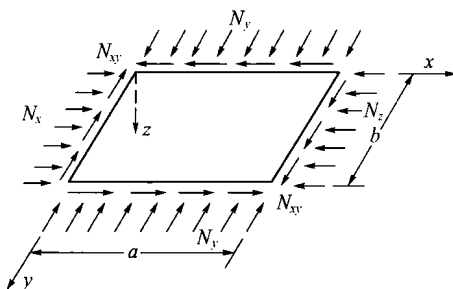


图 3-5 纵向压力和剪切力作用下的矩形板

方程(3-16)求解是在特定的板边界条件下进行的。薄板边界条件分为位移边界条件和力边界条件:

位移边界条件:  $w, \frac{\partial w}{\partial n}$ ;

力边界条件:  $V_n, M_{nn}$

式中  $V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_x - \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_y$

$$Q_n = (M_{x,x} + M_{xy,y}) n_x + (M_{y,y} + M_{xy,x}) n_y$$

$$M_{nn} = n_x^2 M_x + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_y$$

$$M_{ns} = n_x n_y (M_y - M_x) + (n_x^2 - n_y^2) M_{xy}$$

( $n_x, n_y$ ) 是边界法向、切向和  $x$  方向的夹角的余弦函数。

## 2. 求解过程

新型复级数方法可用来求解矩形域的特征值问题。

齐次解求解

方程(3-16)可以进行如下无量纲化:

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\
 & 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \\
 & a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (3-17)
 \end{aligned}$$

设方程(3-17)有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (3-18)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = G e^{im\pi\eta r} \quad (3-19)$$

式中:  $m$  为非 0 的整数。  $G$  为待定复数常数。  $r$  为特征根。

将式(3-18)和式(3-19)代入方程(3-17)可得四次特征根方程

$$\begin{aligned}
 & \left( D_{11} - \frac{a^2 N_x}{(m\pi)^2} \right) + \left( 4D_{16}\alpha - \frac{2a^2 N_{xy}\alpha}{(m\pi)^2} \right) r + \left( 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 - \right. \\
 & \left. \frac{a^2 N_y \alpha^2}{(m\pi)^2} \right) r^2 + 4D_{26}\alpha^3 r^3 + D_{22}\alpha^4 r^4 = 0 \quad (3-20)
 \end{aligned}$$

方程(3-20)可以解出 4 个特征根。方程(3-20)根可以标记为  $r_k, r_{k+1} (k=1, 3)$ 。随着  $m$  和载荷  $(N_x, N_y, N_{xy})$  组合的变化, 方程(3-20)特征根可能是 4 个共轭复数  $(r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1, r_3 = a_3 + ib_3, r_4 = a_3 - ib_3)$ , 或者是 2 个实数根  $(r_3 = a_3, r_4 = a_4)$ , 1 对共轭复数根  $(r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1)$ 。下面先讨论 1 对共轭复数根解情况, 然后再研究 2 个实数根解。

对于特征方程(3-20)拥有 1 对共轭复数根  $(r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k)$  情况, 挠度  $W$  齐次解可以按附录方法写为实数解形式:

$$\begin{aligned}
W_{k,m} + W_{k+1,m} = & G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& G_{3km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& G_{4km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad (3-21)
\end{aligned}$$

式中:  $G_{jkm} (j=1,2,3,4)$  为实数待定常数。

对于 2 个实数根 ( $r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1}$ ) 情况, 挠度  $W$  齐次解可按照附录方法写为下式:

$$\begin{aligned}
W_{k,m} + W_{k+1,m} = & R_{1km} \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi) + \\
& R_{2km} \sin m \pi (a_k \eta + \xi) + R_{3km} \sin m \pi (a_{k+1} (1 - \eta) + \\
& 1 - \xi) + R_{4km} \sin m \pi (a_{k+1} \eta + \xi) \quad (3-22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{k,m} + W_{k+1,m} = & G_{1km} (\sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi) + \\
& \sin m \pi (a_{k+1} (1 - \eta) + 1 - \xi)) + \\
& G_{2km} (\sin m \pi (a_k \eta + \xi) + \sin m \pi (a_{k+1} \eta + \xi)) + \\
& G_{3km} (\sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi) - \\
& \sin m \pi (a_{k+1} (1 - \eta) + 1 - \xi)) + \\
& G_{4km} (\sin m \pi (a_k \eta + \xi) - \\
& \sin m \pi (a_{k+1} \eta + \xi)) \quad (3-23)
\end{aligned}$$

式中:  $R_{jkm}, G_{jkm} (j=1,2,3,4, k=1,2)$  为待定实数常数。

这样挠度函数可以合写为:

$$\begin{aligned}
W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} (W_{k,m} + W_{k+1,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{3km} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) +
\end{aligned}$$

$$G_{4km} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (3-24)$$

上式中引入如下函数

$$\Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \\ \sin m \pi (a_k(1-\eta) + 1 - \xi) + \sin m \pi (a_{k+1}(1-\eta) + 1 - \xi) \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \end{array} \right] \quad (3-25)$$

$$\Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\sinh m \pi b_k (1-\eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \\ \sin m \pi (a_k \eta + \xi) + \sin m \pi (a_{k+1} \eta + \xi) \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \end{array} \right] \quad (3-26)$$

$$\Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \\ \sin m \pi (a_k(1-\eta) + 1 - \xi) - \sin m \pi (a_{k+1}(1-\eta) + 1 - \xi) \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \end{array} \right] \quad (3-27)$$

$$\Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\sinh m \pi b_k (1-\eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \\ \sin m \pi (a_k \eta + \xi) - \sin m \pi (a_{k+1} \eta + \xi) \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \end{array} \right] \quad (3-28)$$

式(3-25)~式(3-28)定义四个函数在全书都采用。

考虑一般情况,再设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi \xi} e^{i n \pi \eta} \quad (3-29)$$

式中:  $s$  是特征根,  $n$  为整数且  $n \neq 0$ 。

采取相似的过程, 可以得到另一个特征方程(3-30)

$$\left(D_{22}\alpha^4 - \frac{a^2\alpha^2 N_y}{(n\pi)^2}\right) + \left(4D_{26}\alpha^3 - \frac{2a^2 N_{xy}\alpha}{(n\pi)^2}\right)s + \left(2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 - \frac{a^2 N_x}{(n\pi)^2}\right)s^2 + 4D_{16}\alpha s^3 + D_{11}s^4 = 0 \quad (3-30)$$

特征方程(3-30)可标记为  $s_k, s_{k+1} (k=1, 3)$ 。类似地, 随着  $n$  和载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )组合的变化, 方程(3-30)特征根也可能是4个共轭复数( $s_k = c_k + id_k, s_{k+1} = c_k - id_k, k=1, 3$ ), 或者是2个实数根( $s_3 = c_3, s_4 = c_4$ ), 一对共轭复数根( $s_1 = c_1 + id_1, s_2 = c_1 - id_1$ )。

另一组齐次解  $W^*$  可以合写为

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{Q_{1kn}\Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn}\Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{3kn}\Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{4kn}\Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)\} \quad (3-31)$$

补充解

对屈曲方程来说, 方程补充解与载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )组合形式有关, 这与弯曲问题不同。

一对边承受  $x$  方向均布压力  $N_x$  矩形板屈曲问题

一对边承受  $x$  方向均布压力  $N_x$  矩形板屈曲问题控制方程为:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-32)$$

对于式(3-18), 当  $m=0$ , 方程(3-32)简化为式(3-33), 可以根据常微分方程理论求解出的解(3-34):

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = 0 \quad (3-33)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 \quad (3-34)$$

式中:  $t_j (j=1,2,3,4)$  为待定常数。

当式(3-29)中  $n=0$ , 方程(3-32)简化为式(3-35), 根据常微分方程理论求解出的解(3-36):

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-35)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin \gamma \xi + g_4 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-36)$$

式中:  $g_j (j=1,2,3,4)$  为待定常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上, 补充解可以合写为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_5(\xi - 0.5) + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_7(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_8((\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\ & h_{16}(\eta - 0.5)^4) + t_9((\xi - 0.5)^2 + \\ & h_{26}(\eta - 0.5)^4) + t_{10}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \\ & h_{36}(\eta - 0.5)^5) + t_{11} \sin \gamma \xi + t_{12} \sin \gamma (1 - \xi) \end{aligned} \quad (3-37)$$

式中:  $t_j (j=1,2,\dots,12)$  为待定常数,  $h_{16} = -\frac{D_{26}}{\alpha D_{22}}$ ,  $h_{26} = -\frac{a^2 N_x}{12 \alpha^4 D_{22}}$ ,

$$h_{36} = -\frac{a^2 N_x}{60 \alpha^4 D_{22}}$$

**两对边承受  $x, y$  方向均布压力  $(N_x, N_y)$  矩形板屈曲问题**

两对边承受  $x, y$  方向均布压力  $(N_x, N_y)$  矩形板屈曲问题控制方程为:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \\ D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-38)$$

对于式(3-18),当  $m=0$ ,方程(3-38)简化为式(3-39),可以根据常微分方程理论求解出的解(3-40):

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + a^2 N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3-39)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_5 \sin \beta \eta + t_6 \sin \beta (1 - \eta) \quad (3-40)$$

式中:  $t_j (j=1,2,3,4,5,6)$  为待定实数常数,  $\beta = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{N_y}{D_{22}}}$ 。

对于式(3-29),当  $n=0$ ,方程(3-38)简化为式(3-41),可求解出式(3-42):

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-41)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin \gamma \xi + g_4 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-42)$$

式中:  $g_j (j=1,2,3,4)$  为待定常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上,补充解合写为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_5 \sin \beta \eta + t_6 \sin \beta (1 - \eta) + t_7 \sin \gamma \xi + t_8 \sin \gamma \xi + \\ & t_9((\xi - 0.5)^2 - (\eta - 0.5)^2 \lambda) + t_{10}((\xi - 0.5)^3 - \\ & 3\lambda(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2) + t_{11}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) - \\ & \frac{\lambda}{3}(\eta - 0.5)^3) + t_{12}((\xi - 0.5)^4 + x_{16}(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\ & x_{17}(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2 + x_{18}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\ & x_{19}(\eta - 0.5)^4) \end{aligned} \quad (3-43)$$

式中:  $t_j (j=1,2,\dots,12)$  为待定常数,

$$\lambda = \frac{N_x}{\alpha^2 N_y}$$



$$x_{16} = - \frac{D_{11} + 24\alpha^4 D_{22}\lambda^2 - 48\alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\lambda}{4D_{16}\alpha - 24\alpha^3 D_{26}\lambda}$$

$$x_{17} = -6\lambda$$

$$x_{18} = \lambda \frac{D_{11} + 24\alpha^4 D_{22}\lambda^2 - 48\alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\lambda}{4D_{16}\alpha - 24D_{26}\alpha^3\lambda}$$

$$x_{19} = \lambda^2$$

对于特定铺设的层合板,如 $[0^\circ/90^\circ]_{sym}$ 或 $[0^\circ]$ 层合板,层合板的 $D_{16}$ 、 $D_{26}$ 为0。这时补充解(3-43)可简化为下式:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_5\sin\beta\eta + t_6\sin\beta(1 - \eta) + t_7\sin\gamma\xi + t_8\sin\gamma\xi + \\ & t_9((\xi - 0.5)^2 - (\eta - 0.5)^2\lambda) + t_{10}((\xi - 0.5)^3 - \\ & 3\lambda(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2) + t_{11}\left((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) - \right. \\ & \left. \frac{\lambda}{3}(\eta - 0.5)^3\right) + t_{12}((\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) - \\ & \lambda(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3) \end{aligned} \quad (3-44)$$

式中:  $t_j(j=1,2,\dots,12)$  为待定常数,  $\lambda = \frac{N_x}{\alpha^2 N_y}$ 。

### 承受四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板屈曲问题

承受四边剪切  $N_{xy}$  的矩形板屈曲问题控制方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \alpha^2 N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (3-45)$$

对于式(3-18),当  $m=0$ ,式(3-45)可简化为式(3-46),对应补充解可以求解得到式(3-47):

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = 0 \quad (3-46)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 \quad (3-47)$$

式中:  $t_j(j=1,2,3,4)$  为待定实数常数。

对于式(3-29), 当  $n=0$ , 方程(3-45)简化为式(3-48), 相应补充解可求解出式(3-49):

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} = 0 \quad (3-48)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3(\xi - 0.5)^2 + g_4(\xi - 0.5)^3 \quad (3-49)$$

式中:  $g_j(j=1,2,3,4)$  为待定实数常数。

在引入其他代数多项式基础上, 补充解合写为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\xi - 0.5)^3 + t_7(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_8((\xi - 0.5)^4 + \mu_1(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + \\ & t_9(\mu_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + (\eta - 0.5)^4) + \\ & t_{10}((\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \mu_3(\eta - 0.5)^5) + \\ & t_{11}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \mu_4(\eta - 0.5)^5) + \\ & t_{12}((\xi - 0.5)^6 + \mu_5(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\ & \mu_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \mu_7(\eta - 0.5)^6) \quad (3-50) \end{aligned}$$

式中:  $t_j(j=1,2,\dots,12)$  为待定实数常数,

$$\mu_1 = -\frac{12D_{11}}{a^2\alpha N_{xy}}$$

$$\mu_2 = -\frac{12\alpha^3 D_{22}}{a^2 N_{xy}}$$

$$\mu_3 = -\frac{a^2 N_{xy}}{30\alpha^3 D_{22}}$$

$$\mu_4 = -\frac{a^2 \alpha N_{xy}}{30 D_{11}}$$

$$\mu_5 = -\frac{30 D_{11}}{a^2 \alpha N_{xy}}$$

$$\mu_6 = \frac{30 D_{11}}{a^2 N_{xy}} \frac{D_{16}}{\alpha^3 D_{26}}$$

$$\mu_7 = -\frac{D_{11}}{\alpha^6 D_{22}} \frac{D_{16}}{D_{26}}$$

对于特定铺设的层合板,如 $[0^\circ/90^\circ]_{sym}$ 或 $[0^\circ]$ 层合板,层合板的 $D_{16}$ 、 $D_{26}$ 为0。这时补充解(3-50)可简化为下式:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\xi - 0.5)^3 + t_7(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_8((\xi - 0.5)^4 + \mu_1(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + \\ & t_9(\mu_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + (\eta - 0.5)^4) + \\ & t_{10}((\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \mu_3(\eta - 0.5)^5) + \\ & t_{11}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \mu_4(\eta - 0.5)^5) + \\ & t_{12}((\xi - 0.5)^6 + \mu_5(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\ & \mu_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + (\eta - 0.5)^6) \end{aligned} \quad (3-51)$$

式中:

$$\mu_1 = -\frac{12 D_{11}}{a^2 \alpha N_{xy}}$$

$$\mu_2 = -\frac{12 \alpha^3 D_{22}}{a^2 N_{xy}}$$

$$\mu_3 = -\frac{a^2 N_{xy}}{30 \alpha^3 D_{22}}$$

$$\mu_4 = -\frac{a^2 \alpha N_{xy}}{30 D_{11}}$$

$$\mu_5 = -\frac{30 D_{11}}{a^2 \alpha N_{xy}}$$

$$\mu_6 = -\frac{30 \alpha^3 D_{22}}{a N_{xy}}$$

承受两对边压力( $N_x, N_y$ )和四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板屈曲问题

承受两对边压力( $N_x, N_y$ )和四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板屈曲问题控制方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4 D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2 D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4 D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \\ D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2 N_{xy} \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (3-52) \end{aligned}$$

对于式(3-18),当 $m=0$ ,式(3-52)可简化为式(3-53),对应补充解可以求解得到式(3-54):

$$D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + a^2 N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3-53)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3 \sin \beta \eta + t_6 \sin \beta(1 - \eta) \quad (3-54)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$  为待定实数常数,  $\beta = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{N_y}{D_{22}}}$ 。

对于式(3-29),当 $n=0$ ,方程(3-52)简化为式(3-55),相应补充解可求解出式(3-56):

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-55)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin \gamma \xi + g_4 \sin \gamma(1 - \xi) \quad (3-56)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定实数常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上,补充解合写为:

$$\begin{aligned}
 W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4((\xi - 0.5)^2 + \\
 & x_1(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + t_5((\eta - 0.5)^2 + \\
 & x_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + t_6((\xi - 0.5)^3 - \\
 & 3x_x(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + 2\chi_{xy}\chi_x(\eta - 0.5)^3) + \\
 & t_7((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) - 2\chi_{xy}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \\
 & x_4(\eta - 0.5)^3) + t_8((\xi - 0.5)^4 + x_9(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\
 & x_{10}(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2 + x_{11}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\
 & x_{12}(\eta - 0.5)^4) + t_9\sin\beta\eta + t_{10}\sin\beta(1 - \eta) + \\
 & t_{11}\sin\gamma\xi + t_{12}\sin\gamma(1 - \xi)
 \end{aligned} \tag{3-57}$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数,

$$\chi_x = -\frac{N_x}{\alpha^2 N_y}$$

$$\chi_{xy} = -\frac{N_{xy}}{\alpha N_y}$$

$$\chi_1 = -\frac{N_x}{\alpha N_{xy}}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{\chi_{xy}}$$

$$\chi_4 = -\frac{N_x}{3\alpha^2 N_y} + 4\frac{N_{xy}^2}{\alpha^2 N_y^2},$$

$$x_9 = -\frac{D_{11} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_x + 8\alpha^3 D_{26}\chi_x\chi_y + \alpha^4 D_{22}(\chi_x^2 - 4\chi_{xy}^2\chi_x)}{\alpha D_{16} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_{xy} + \alpha^3 D_{26}(-\chi_x + 4\chi_{xy}^2) + \alpha^4 D_{22}(\chi_x\chi_{xy} - 2\chi_{xy}^3)}$$

$$x_{10} = -6\chi_x + 3\chi_{xy} \frac{D_{11} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_x + 8\alpha^3 D_{26}\chi_x\chi_y + \alpha^4 D_{22}(\chi_x^2 - 4\chi_{xy}^2\chi_x)}{D_{16} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_{xy} + \alpha^3 D_{26}(-\chi_x + 4\chi_{xy}^2) + \alpha^4 D_{22}(\chi_x\chi_{xy} - 2\chi_{xy}^3)}$$

$$x_{11} = -\chi_x \chi_9 - \frac{4}{3} \chi_{xy} \chi_{10}$$

$$x_{12} = -\chi_x \chi_{10} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \chi_{xy} \chi_{11}$$

承受一对边压力( $N_x$ )和四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板屈曲问题

承受一对边压力( $N_x$ )和四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板屈曲问题控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) = 0 \quad (3-58)$$

对于式(3-18),当 $m=0$ ,式(3-58)可简化为式(3-59),对应补充解可以求解得到式(3-60):

$$D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = 0 \quad (3-59)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\eta - 0.5)^3 \quad (3-60)$$

式中: $t_j(j=1,2,5,6)$ 为待定实数常数。

对于式(3-29),当 $n=0$ ,方程(3-58)简化为式(3-61),相应补充解可求解出式(3-62):

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (3-61)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin \gamma \xi + g_4 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-62)$$

式中: $g_j(j=1,2,3,4)$ 为待定实数常数, $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上,补充解合写为:

$$W^{**} = t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4((\xi - 0.5)^2 -$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_0(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\eta - 0.5)^3 + \\
& t_7((\xi - 0.5)^3 + \lambda_1(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \\
& \lambda_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_8((\xi - 0.5)^4 + \\
& \lambda_3(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \lambda_4(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2 + \\
& \lambda_5(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \lambda_6(\eta - 0.5)^4) + t_9((\eta - 0.5)^4 + \\
& x_7(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + t_{10}((\eta - 0.5)^5 + \\
& x_8(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2) + t_{11}\sin\gamma\xi + \\
& t_{12}\sin\gamma(1 - \xi)
\end{aligned} \tag{3-63}$$

式中:  $t_j(j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{N_x}{\alpha N_{xy}} \\
x_1 &= -1.5\lambda_0 \\
x_2 &= 0.25\lambda_0^2 \\
x_3 &= -2\lambda_0 \\
x_4 &= 1.5\lambda_0^2 \\
x_5 &= -0.5\lambda_0^3 \\
x_6 &= -\frac{D_{11}}{\alpha^4 D_{22}} + 2\frac{D_{16}}{\alpha^3 D_{22}}\lambda_0 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{2\alpha^2 D_{22}}\lambda_0^2 + 0.5\frac{D_{26}}{\alpha D_{22}}\lambda_0^3 \\
x_7 &= -12\frac{\alpha^3 D_{22}}{N_{xy}} \\
x_8 &= -30\frac{\alpha^3 D_{22}}{N_{xy}}
\end{aligned}$$

### 3. 对称角铺设薄层合经典矩形板屈曲问题一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \quad (3-64)$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数。

#### 4. 角点条件

板角点条件产生有两种情况,一种是数学处理方法带来的,比如采取正弦级数变换,正弦级数在边界端点间断,需要补充角点条件,另一类是物理角点条件,比如悬壁板的自由角点,需要补充力角点条件。在上述的解析求解中,引入补充解后可以处理复杂的边界问题,也可处理板角点问题。对于经典矩形板屈曲问题,角点条件可以建立 12 个。

#### 5. 求解过程

实际计算中,设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解(3-64)共有  $12M+12$  个未知数  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$ 。对于矩形板屈曲问题,共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中,形成 8 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数,可以得到  $8M$  个线性代数方程;在四个角点  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件,又可建立 12 个线性方程,这样总共建立  $8M+12$  个线性方程,合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \quad (3-65)$$

式中:  $K$  为  $(8M+12) \times (8M+12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, t_1, t_2, \dots, t_{12}\}$$

当方程(3-65)有异于零的解(即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  不同时为 0), 需要  $(8M+12) \times (8M+12)$  矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的载荷即为屈曲载荷。值得指出的是,需要求出最低的载荷值即临界载荷值。这样对称角铺设纤维增强复合材料矩形



板屈曲问题得解。

### 3.4 对称角铺设薄层合经典矩形板振动问题解析

考虑矩形板自由振动问题。板的自由振动频率与板结构的几何参数和材料参数有关。本节应用新型复级数法求解对称角铺设薄层合经典矩形板振动问题,并建立振动问题一般解析解。

#### 1. 直角坐标系下的振动控制方程

对称角铺设薄层合经典矩形板振动问题控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho \omega^2 w = 0 \quad (3-66)$$

式中:  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。

#### 2. 求解过程

齐次解求解

方程(3-66)可以无量纲化:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \alpha^4 \rho \omega^2 W = 0 \quad (3-67)$$

设方程(3-67)有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\sigma\xi} \quad (3-68)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = G e^{im\sigma\eta r} \quad (3-69)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(3-68)和(3-69)代入方程(3-67)可得4阶特征方程:

$$\left(D_{11} - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{(m\pi)^4}\right) + 4D_{16}\alpha r + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 r^2 + 4D_{26}\alpha^3 r^3 + D_{22}\alpha^4 r^4 = 0 \quad (3-70)$$

式(3-70)有4个特征根。方程(3-70)根可以标记为 $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。随着 $m$ 和频率 $\omega$ 组合的变化,方程(3-70)特征根可能是4个共轭复数( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1, r_3 = a_3 + ib_3, r_4 = a_3 - ib_3$ ),或者是2个实数根( $r_3 = a_3, r_4 = a_4$ ),1对共轭复数根( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1$ )。类似可得挠度函数 $W$ 齐次解如下:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} (W_{k,m} + W_{k+1,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{3km} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{4km} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (3-71)$$

考虑一般情况,再设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{in\pi s\xi} e^{in\pi\eta} \quad (3-72)$$

式中: $s$ 为特征根, $n \neq 0$ 。

采取相似步骤,可得另一个特征方程(3-73):

$$\left(D_{22} - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{(n\pi)^4}\right) + 4D_{26}s + 2(D_{12} + 2D_{66})s^2 + 4D_{16}\alpha s^3 + D_{11}s^4 = 0 \quad (3-73)$$

特征方程(3-73)的特征根也可标注为 $s_k, s_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。伴随 $n$ 和 $\omega$ 变化,特征方程(3-73)特征根 $s_k, s_{k+1}$ 可能为2对共轭复数( $s_k = c_k + id_k, s_{k+1} = c_k - id_k$ ),也可能为1对共轭复数,2个实数根。

另一组 $W$ 齐次解可以合写为如下实数级数:

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ Q_{3kn} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{4kn} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} \quad (3-74)$$

### 补充解

振动方程补充解与振动频率  $\omega$  有关联。

对于式(3-68), 当  $m=0$ , 方程(3-67)可简化为(3-75), 根据常微分方程理论可以从方程(3-75)求解出补充解。

$$D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^4 \rho \omega^2 W = 0 \quad (3-75)$$

方程(3-75)有4个特征根:

$$\pm a_0, \pm ia_0$$

式中:  $a_0 = a \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{D_{22}}} \sqrt{\omega}}$

方程(3-75)解如下:

$$W^* = t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} + t_3 \sinh a_0 \eta + t_4 \sinh a_0 (1 - \eta) \quad (3-76)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4)$  是待定常数。

考虑式(3-72)中  $n$  为0情况, 另一组补充解可从方程(3-77)推导求解。

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^4 \omega^2 \rho W = 0 \quad (3-77)$$

方程(3-77)有4个根:

$$\pm c_0, \pm ic_0$$

式中:  $c_0 = a \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{D_{11}}} \sqrt{\omega}}$

方程(3-77)有如下解:

$$W^* = t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} + t_7 \sinh c_0 \xi + t_8 \sinh c_0 (1 - \xi) \quad (3-78)$$

考虑到矩形板有 12 个角点条件, 引入如下一组补充解:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \end{aligned} \quad (3-79)$$

式中:  $m, n$  为整数。

将式(3-79)代入方程(3-67)可得:

$$\begin{aligned} & t_9 \left( (D_{11} (m \pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 r^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 + \right. \\ & \quad D_{22} (n \pi)^4 \alpha^4 - a^4 \rho \omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\ & \quad 4D_{16} (m \pi)^3 (n \pi) \alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn9} + B_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \Big) + \\ & t_{10} \left( (D_{11} (m \pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 r^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 + \right. \\ & \quad D_{22} (n \pi)^4 \alpha^4 - a^4 \rho \omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\ & \quad 4D_{16} (m \pi)^3 (n \pi) \alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn10} + B_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \Big) + \\ & t_{11} \left( (D_{11} (m \pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 r^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 + \right. \\ & \quad D_{22} (n \pi)^4 \alpha^4 - a^4 \rho \omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\ & \quad 4D_{16} (m \pi)^3 (n \pi) \alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn11} + B_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \Big) + \\ & t_{12} \left( (D_{11} (m \pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 r^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 + \right. \\ & \quad D_{22} (n \pi)^4 \alpha^4 - a^4 \rho \omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\ & \quad 4D_{16} (m \pi)^3 (n \pi) \alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn12} + \end{aligned}$$

$$B_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta = 0 \quad (3-80)$$

$$\cos m \pi \xi \cos n \pi \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mnkl} \sin k \pi \xi \sin l \pi \eta. \quad (3-81)$$

$$C_{mnkl} = \begin{cases} \frac{16mn}{\pi^2(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)}, & \text{仅当 } m \pm k \text{ 和 } n \pm l \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (3-82)$$

$$B_{mn9} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \eta \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (3-83)$$

$$B_{mn10} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \eta \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (3-84)$$

$$B_{mn11} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (3-85)$$

$$B_{mn12} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (3-86)$$

$A_{mn9}, A_{mn10}, A_{mn11}, A_{mn12}$  可以从方程(3-80)求得。 $l, k$  为整数。

这样全补充解可以合写如下:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} + t_3 \sin a_0 \eta + t_4 \sin a_0 (1 - \eta) + \\ & t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} + t_7 \sin c_0 \xi + t_8 \sin c_0 (1 - \xi) + \\ & t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \end{aligned} \quad (3-87)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数。

### 3. 对称角铺设薄层合经典矩形板振动问题一般解析解

振动问题一般解析解可以参照屈曲问题解析解构建。据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \quad (3-88)$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数。

### 4. 求解

振动问题求解过程也类似于屈曲问题求解。实际计算中, 设  $m = n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (3-88) 共有  $12M + 12$  个未知数  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$ 。对于矩形板振动问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M + 12$  个线性方程, 合写为下式:

$$K \{C\} = \{0\} \quad (3-89)$$

式中:  $K$  为  $(8M + 12) \times (8M + 12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, t_1, t_2, \dots, t_{12}\}$$

当方程 (3-65) 有异于零的解 (即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  即为所求频率。

### 3.5 对称角铺设薄层合经典矩形板 纵横弯曲问题解析

考虑承载纵向载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )、横向载荷 $q$ 的矩形板(图3-6)。在小挠度范围内,纵向、横向载荷引起的挠度、应力可以分别处理。考虑到在工程实际中,板结构很多情况都处在纵横载荷作用下,这种问题研究有现实意义。本节将复级数方法用于求解对称角铺设薄层合经典矩形板纵横弯曲问题,并建立了一般解析解。

对称角铺设薄层合经典矩形板纵横弯曲控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = q \quad (3-90)$$

式中: $N_x, N_y, N_{xy}$ 是作用于板中面单位宽度上的拉力(压力)、剪力。

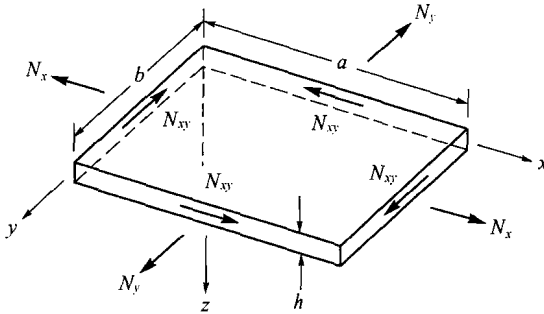


图3-6 承受中面载荷的矩形板

方程(3-90)可以进行如下无量纲化:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} +$$

$$4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + N_y\alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = \frac{qa^4}{h} \quad (3-91)$$

层合板纵横弯曲问题一般解析解由齐次解、补充解和特解叠加而来,求解过程与前面章节类似。

### 1. 齐次解

设控制方程(3-91)有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\alpha\xi} \quad (3-92)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = G e^{im\alpha\eta} \quad (3-93)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  是待定复数常数,  $r$  为特征根。

将式(3-92)和(3-93)代入方程(3-91)可得 4 阶特征方程:

$$\left( D_{11} + \frac{a^2 N_x}{(m\pi)^2} \right) + \left( 4D_{16}\alpha + \frac{2a^2 N_{xy}\alpha}{(m\pi)^2} \right) r + \left( 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 + \frac{a^2 N_{xy}\alpha^2}{(m\pi)^2} \right) r^2 + 4D_{26}\alpha^3 r^3 + D_{22}r^4 \alpha^4 = 0 \quad (3-94)$$

特征方程(3-94)有 4 个特征根。方程(3-94)根可以标记为  $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。随着  $m$  和载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )组合的变化,方程(3-94)特征根可能是 4 个共轭复数 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1, r_3 = a_3 + ib_3, r_4 = a_3 - ib_3$ ), 或者是 2 个实数根 ( $r_3 = a_3, r_4 = a_4$ ), 1 对共轭复数根 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1$ )。

类似地,可得挠度  $W$  一组齐次解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} (W_{k,m} + W_{k+1,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) +$$



$$G_{3km} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{4km} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (3-95)$$

再设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \alpha \xi} e^{i n \pi \eta} \quad (3-96)$$

式中:  $s$  为特征根,  $n \neq 0$ 。

类似可得另一个特征方程(3-93)

$$\left( D_{22} \alpha^4 + \frac{a^2 \alpha^2 N_y}{(n\pi)^2} \right) + \left( 4D_{26} \alpha^3 + \frac{2a^2 N_{xy} \alpha}{(n\pi)^2} \right) s + \left( 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 + \frac{a^2 N_x}{(n\pi)^2} \right) s^2 + 4D_{16} \alpha s^3 + D_{11} s^4 = 0 \quad (3-97)$$

特征方程(3-97)特征根可以标记为  $s_k, s_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。随着  $n$  和载荷 ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) 组合的变化, 方程(3-97)特征根可能是共轭复数 ( $s_k = c_k + i d_k, s_{k+1} = c_k - i d_k$ ), 或者是 2 个实数根 ( $s_k = c_k, s_{k+1} = c_{k+1}$ )。

另一组挠度函数  $W$  的齐次解可写为下式:

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{3kn} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{4kn} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} \quad (3-98)$$

## 2. 补充解

纵横弯曲问题补充解与纵向载荷 ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) 有关。

一对边承受  $x$  方向均布载荷  $N_x$  的矩形板纵横弯曲问题

一对边承受  $x$  方向均布载荷  $N_x$  的矩形板纵横弯曲问题控制方程为:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{q a^4}{h} \quad (3-99)$$

对于式(3-92), 当  $m=0$ , 方程(3-99)齐次式简化为式(3-100), 可以根据常微分方程理论求解出的解(3-101):

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-100)$$

式中:  $t_j (j=1,2,3,4)$  为待定常数。

当  $N_x$  为拉力时, 方程(3-100)有2个实数根:  $\pm \gamma, \gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

这样, 可得方程(3-100)解:

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma \xi} + g_4 \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma \xi} \quad (3-101)$$

当  $N_x$  为压力时, 方程(3-100)有一对复数根  $\pm i\gamma$ , 相应解如下:

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin \gamma \xi + g_4 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-102)$$

式中:  $g_j (j=1,2,3,4)$  为待定常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{|N_x|}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上, 对应纵向载荷( $N_x$ )下控制方程的补充解为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_5(\xi - 0.5) + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_7(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_8((\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\ & h_{16}(\eta - 0.5)^4) + t_9((\xi - 0.5)^2 + h_{26}(\eta - 0.5)^4) + \\ & t_{10}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + h_{36}(\eta - 0.5)^5) + f_{11}(\xi) \end{aligned} \quad (3-103)$$

式中:  $t_j (j=1,2,\dots,12)$  为待定常数,

$$h_{16} = -\frac{D_{26}}{\alpha D_{22}}, h_{26} = -\frac{a^2 N_x}{12 \alpha^4 D_{22}}, h_{36} = -\frac{a^2 N_x}{60 \alpha^4 D_{22}}。$$

$$f_{11}(\xi) = \begin{bmatrix} t_{11} \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma} + t_{12} \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma}, & N_x > 0 \\ t_{11} \sinh \gamma \xi + t_{12} \sinh \gamma (1 - \xi), & N_x < 0 \end{bmatrix} \quad (3-104)$$

两对边承受均布纵向载荷( $N_x, N_y$ )的矩形板纵横弯曲问题

两对边承受均布纵向载荷( $N_x, N_y$ )的矩形板纵横弯曲问题控制方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ 4D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = \frac{qa^4}{h} \end{aligned} \quad (3-105)$$

对于  $m=0$ , 补充解可以从方程(3-106)求解而来:

$$D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3-106)$$

如果  $N_y$  为拉力, 可以得到如下补充解

$$W^* = g_1 + g_2(\eta - 0.5) + g_3 \frac{\sinh \beta \eta}{\sinh \beta} + g_4 \frac{\sinh \beta (1 - \eta)}{\sinh \beta} \quad (3-107)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定实数常数,  $\beta = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{|N_y|}{D_{22}}}$ 。

如  $N_y$  为压力, 可以得到如下补充解:

$$W^* = g_1 + g_2(\eta - 0.5) + g_3 \sin \beta \eta + g_4 \sin \beta (1 - \eta) \quad (3-108)$$

考虑  $n=0$  情况, 另一组补充解能从式(3-109)求解:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-109)$$

如果  $N_x$  为拉力, 可得如下补充解

$$W^* = g_5 + g_6(\xi - 0.5) + g_7 \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma} + g_8 \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma} \quad (3-110)$$

式中:  $g_j (j=5, 6, 7, 8)$  为待定实数常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

如  $N_x$  为压力, 方程(3-105)有2个复数根  $\pm i\gamma$  和如下解:

$$W^* = g_5 + g_6(\xi - 0.5) + g_7 \sin \gamma \xi + g_8 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-111)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定实数常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{|N_x|}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上, 对应双向均布纵向载荷( $N_x, N_y$ )下控制方程的补充解为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_5((\xi - 0.5)^2 - (\eta - 0.5)^2 \lambda) + t_6((\xi - 0.5)^3 - \\ & 3\lambda(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2) + t_7((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) - \\ & \frac{\lambda}{3}(\eta - 0.5)^3) + t_8((\xi - 0.5)^4 + \\ & x_{16}(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + x_{17}(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2 + \\ & x_{18}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + x_{19}(\eta - 0.5)^4) + \\ & f_{22}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3-112)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{N_x}{\alpha^2 N_y} \\ x_{16} &= - \frac{D_{11} + 24\alpha^4 D_{22} \lambda^2 - 48\alpha^2 (D_{12} + 2D_{66}) \lambda}{4D_{16} \alpha - 24\alpha^3 D_{26} \lambda} \\ x_{17} &= -6\lambda \end{aligned}$$

$$x_{18} = \lambda \frac{D_{11} + 24\alpha^4 D_{22}\lambda^2 - 48\alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\lambda}{4D_{16}\alpha - 24D_{26}\alpha^3\lambda}, x_{19} = \lambda^2$$

$$f_{22}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} t_9 \frac{\sinh\beta\eta}{\sinh\beta} + t_{10} \frac{\sinh\beta(1-\eta)}{\sinh\beta} + t_{11} \frac{\sinh\gamma\xi}{\sinh\gamma} + t_{12} \frac{\sinh\gamma(1-\xi)}{\sinh\gamma}, N_x > 0, N_y > 0 \\ t_9 \frac{\sinh\beta\eta}{\sinh\beta} + t_{10} \frac{\sinh\beta(1-\eta)}{\sinh\beta} + t_{11} \sinh\gamma\xi + t_{12} \sinh\gamma(1-\xi), N_x > 0, N_y < 0 \\ t_9 \sinh\beta\eta + t_{10} \sinh\beta(1-\eta) + t_{11} \frac{\sinh\gamma\xi}{\sinh\gamma} + t_{12} \frac{\sinh\gamma(1-\xi)}{\sinh\gamma}, N_x < 0, N_y > 0 \\ t_9 \sinh\beta\eta + t_{10} \sinh\beta(1-\eta) + t_{11} \sinh\gamma\xi + t_{12} \sinh\gamma(1-\xi), N_x < 0, N_y < 0 \end{bmatrix}$$

对于特定铺设的层合板,其 $D_{16}$ 和 $D_{26}$ 为0。在这些情况下,控制方程补充解(3-112)可有更为简单形式:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_5((\xi - 0.5)^2 - (\eta - 0.5)^2\lambda) + t_6((\xi - 0.5)^3 - \\ & 3\lambda(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2) + t_7((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) - \\ & \frac{\lambda}{3}(\eta - 0.5)^3) + t_8((\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) - \\ & \lambda(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3) + f_{22}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3-113)$$

式中: $\lambda, f_{22}(\xi, \eta)$ 与式(3-112)中相应表示一致。

### 承受四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板纵横弯曲问题

承受四边剪切 $N_{xy}$ 的矩形板纵横弯曲问题控制方程为:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \\ D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{qa^4}{h} \end{aligned} \quad (3-114)$$

在引入其他代数多项式基础上,对应四边剪切作用下控制方程的补充解为:

$$\begin{aligned}
W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\xi - 0.5)^3 + t_7(\eta - 0.5)^3 + \\
& t_8((\xi - 0.5)^4 + \mu_1(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + \\
& t_9(\mu_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + (\eta - 0.5)^4) + \\
& t_{10}((\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \mu_3(\eta - 0.5)^5) + \\
& t_{11}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \mu_4(\eta - 0.5)^5) + \\
& t_{12}((\xi - 0.5)^6 + \mu_5(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\
& \mu_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \mu_7(\eta - 0.5)^6) \quad (3-115)
\end{aligned}$$

式中:  $t_j(j=1,2,\dots,12)$  为待定常数,

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\frac{12D_{11}}{a^2\alpha N_{xy}} \\
\mu_2 &= -\frac{12\alpha^3 D_{22}}{a^2 N_{xy}} \\
\mu_3 &= -\frac{a^2 N_{xy}}{30\alpha^3 D_{22}} \\
\mu_4 &= -\frac{a^2\alpha N_{xy}}{30D_{11}} \\
\mu_5 &= -\frac{30D_{11}}{a^2\alpha N_{xy}} \\
\mu_6 &= \frac{30D_{11}}{a^2 N_{xy}} \frac{D_{16}}{\alpha^3 D_{26}} \\
\mu_7 &= -\frac{D_{11}}{\alpha^6 D_{22}} \frac{D_{16}}{D_{26}}
\end{aligned}$$

对于特定铺设的层合板,其  $D_{16}$  和  $D_{26}$  为 0。在这些情况下,控制方程补充解(3-115)可有更为简单形式:

$$W^{**} = t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\xi - 0.5)^3 + t_7(\eta - 0.5)^3 + \\
& t_8((\xi - 0.5)^4 + \mu_1(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + \\
& t_9(\mu_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + (\eta - 0.5)^4) + \\
& t_{10}((\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \mu_3(\eta - 0.5)^5) + \\
& t_{11}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \mu_4(\eta - 0.5)^5) + \\
& t_{12}((\xi - 0.5)^6 + \mu_5(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\
& \mu_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + (\eta - 0.5)^6) \quad (3-116)
\end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\frac{12D_{11}}{a^2\alpha N_{xy}} \\
\mu_2 &= -\frac{12\alpha^3 D_{22}}{a^2 N_{xy}} \\
\mu_3 &= -\frac{a^2 N_{xy}}{30\alpha^3 D_{22}} \\
\mu_4 &= -\frac{a^2\alpha N_{xy}}{30D_{11}} \\
\mu_5 &= -\frac{30D_{11}}{a^2\alpha N_{xy}} \\
\mu_6 &= -\frac{30\alpha^3 D_{22}}{aN_{xy}}
\end{aligned}$$

承载纵向均布载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )、横向载荷 $q$ 的矩形板纵横弯曲问题

承载纵向均布载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )、横向载荷 $q$ 的矩形板纵横弯曲问题控制方程为

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \\
& D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + N_y\alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = \frac{qa^4}{h}
\end{aligned}$$

(3-117)

当  $m=0$ , 可从方程(3-118)求出一组补充解:

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3-118)$$

如果  $N_y$  为拉力, 可根据常微分方程理论求解出一组解:

$$W^* = g_1 + g_2(\eta - 0.5) + g_3 \frac{\sinh \beta \eta}{\sinh \beta} + g_4 \frac{\sinh \beta (1 - \eta)}{\sinh \beta} \quad (3-119)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数,  $\beta = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{|N_y|}{D_{22}}}$

如果  $N_y$  为压力, 可得一组补充解

$$W^* = g_1 + g_2(\eta - 0.5) + g_3 \sin \beta \eta + g_4 \sin \beta (1 - \eta) \quad (3-120)$$

当  $n=0$ , 可从方程(3-121)求解出另一组补充解。

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-121)$$

如果  $N_x$  为拉力, 可得一组补充解:

$$W^* = g_5 + g_6(\xi - 0.5) + g_7 \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma} + g_8 \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma} \quad (3-122)$$

式中:  $g_j (j=5, 6, 7, 8)$  为待定常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{|N_x|}{D_{11}}}$ 。

如果  $N_x$  为压力, 方程(3-121)有两个复数根  $\pm i\gamma$  和如下解:

$$W^* = g_5 + g_6(\xi - 0.5) + g_7 \sin \gamma \xi + g_8 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-123)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数。

在引入其他代数多项式基础上, 控制方程的补充解为:

$$W^{**} = t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4((\xi - 0.5)^2 +$$



$$\begin{aligned}
& \chi_1(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + t_5((\eta - 0.5)^2 + \\
& \chi_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + t_6((\xi - 0.5)^3 - \\
& 3\chi_x(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + 2\chi_{xy}\chi_x(\eta - 0.5)^3) + \\
& t_7((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) - 2\chi_{xy}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \\
& \chi_4(\eta - 0.5)^3) + t_8((\xi - 0.5)^4 + x_9(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \\
& x_{10}(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2 + x_{11}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\
& x_{12}(\eta - 0.5)^4) + f_{22}(\xi, \eta) \quad (3 - 124)
\end{aligned}$$

式中:  $t_j(j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数,

$$\begin{aligned}
\chi_x &= -\frac{N_x}{\alpha^2 N_y} \\
\chi_{xy} &= -\frac{N_{xy}}{\alpha N_y} \\
\chi_1 &= -\frac{N_x}{\alpha N_{xy}} \\
\chi_2 &= -\frac{1}{\chi_{xy}} \\
\chi_4 &= -\frac{N_x}{3\alpha^2 N_y} + 4\frac{N_{xy}^2}{\alpha^2 N_y^2} \\
x_9 &= -\frac{D_{11} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_x + 8\alpha^3 D_{26}\chi_x\chi_y + \alpha^4 D_{22}(\chi_x^2 - 4\chi_{xy}^2\chi_x)}{\alpha D_{16} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_{xy} + \alpha^3 D_{26}(-\chi_x + 4\chi_{xy}^2) + \alpha^4 D_{22}(\chi_x\chi_{xy} - 2\chi_{xy}^3)} \\
x_{10} &= -6\chi_x + 3\chi_{xy} \frac{D_{11} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_x + 8\alpha^3 D_{26}\chi_x\chi_y + \alpha^4 D_{22}(\chi_x^2 - 4\chi_{xy}^2\chi_x)}{D_{16} - \alpha^2(D_{12} + 2D_{66})\chi_{xy} + \alpha^3 D_{26}(-\chi_x + 4\chi_{xy}^2) + \alpha^4 D_{22}(\chi_x\chi_{xy} - 2\chi_{xy}^3)} \\
x_{11} &= -\chi_x\chi_9 - \frac{4}{3}\chi_{xy}\chi_{10} \\
x_{12} &= -\chi_x\chi_{10} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\chi_{xy}\chi_{11} .
\end{aligned}$$

承受一对边均布载荷  $N_x$  和四边剪切  $N_{xy}$  的矩形板纵横弯曲问题

承受一对边均布载荷  $N_x$  和四边剪切  $N_{xy}$  的矩形板纵横弯曲问题

控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) = \frac{qa^4}{h} \quad (3-125)$$

对于式(3-96),当 $\eta=0$ ,式(3-125)齐次式简化为式(3-126),可以根据常微分方程求出补充解。

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-126)$$

如果 $N_x$ 为拉力,方程(3-126)有两个实数根 $\pm\gamma$ 和补充解:

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \frac{\sinh\gamma\xi}{\sinh\gamma} + g_4 \frac{\sinh\gamma(1-\xi)}{\sinh\gamma} \quad (3-127)$$

如果 $N_x$ 为压力,方程(3-126)有1对共轭复数根 $\pm i\gamma$ 和补充解:

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin\gamma\xi + g_4 \sin\gamma(1-\xi) \quad (3-128)$$

式中: $g_j(j=1,2,3,4)$ 为待定常数, $\gamma = a \sqrt{\frac{|N_x|}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上,控制方程的补充解为:

$$W^{**} = t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4((\xi - 0.5)^2 - \lambda_0(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)) + t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\eta - 0.5)^3 + t_7((\xi - 0.5)^3 + \lambda_1(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \lambda_2(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2) + t_8((\xi - 0.5)^4 + \lambda_3(\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5) + \lambda_4(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2 + \lambda_5(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \lambda_6(\eta - 0.5)^4) + f_{11}(\xi) \quad (3-129)$$

式中: $t_j(j=1,2,\dots,12)$ 为待定实数常数,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{N_x}{\alpha N_{xy}} \\
\chi_1 &= -1.5\lambda_0 \\
\chi_2 &= 0.25\lambda_0^2 \\
\chi_3 &= -2\lambda_0 \\
\chi_4 &= 1.5\lambda_0^2 \\
\chi_5 &= -0.5\lambda_0^3 \\
x_6 &= -\frac{D_{11}}{\alpha^4 D_{22}} + 2\frac{D_{16}}{\alpha^3 D_{22}}\lambda_0 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{2\alpha^2 D_{22}}\lambda_0^2 + 0.5\frac{D_{26}}{\alpha D_{22}}\lambda_0^3 \\
\chi_7 &= -12\frac{\alpha^3 D_{22}}{N_{xy}} \\
\chi_8 &= -30\frac{\alpha^3 D_{22}}{N_{xy}}
\end{aligned}$$

### 3. 特解

特解相对任意求得。如矩形板承受均布载荷  $q, N_x, N_y, N_{xy}$ , 控制方程特解  $W_0$  可取如下形式:

$$W_0 = -\frac{q}{5} \left( \frac{(\xi - 0.5)^2}{a^2 N_x} + \frac{(\eta - 0.5)^2}{N_y \alpha^2 a^2} + \frac{(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)}{2N_{xy} a \alpha} \right) \quad (3-130)$$

### 4. 对称角铺设薄层合经典矩形板纵横弯曲问题一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + \\
&\quad W^{**} + W_0 \quad (3-131)
\end{aligned}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数。

### 5. 求解

对称角铺设薄层合经典矩形板纵横弯曲问题解析求解过程与横向弯曲问题类似。实际计算中, 设  $m = n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解 (3 - 131) 共有  $12M + 12$  个未知数。对于矩形板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M + 12$  个线性方程, 对称角铺设纤维增强复合材料矩形板纵横向弯曲问题得解。

## 3.6 Winkle-Pasternak 地基上各向异性经典矩形板弯曲问题分析

复合材料结构在土木工程应用广泛。在地基上的复合材料结构力学问题有现实应用意义。本节中新型复级数方法用来分析 Winkle-Pasternak 地基上各向异性经典矩形板弯曲问题, 并给出了一般解析解。

Winkle-Pasternak 地基上各向异性经典矩形板弯曲问题控制方程为:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Kw = q \quad (3 - 132)$$

式中:  $K$  为地基常数。

控制方程 (3 - 132) 可以进行无量纲化:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4D_{16} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{26} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} +$$

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + Ka^4 W = \frac{qa^4}{h} \quad (3-133)$$

### 1. 齐次解求解

设方程(3-133)齐次式有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (3-134)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = Ge^{im\sigma\eta} \quad (3-135)$$

式中:  $m$  为非0的整数;  $G$  为待定复数常数;  $r$  为特征根。

将式(3-134)和(3-135)代入方程(3-133)可得4阶特征方程

$$\left( D_{11} + Ka^4 \frac{1}{(m\pi)^4} \right) + 4D_{16}\alpha r + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 r^2 + 4D_{26}\alpha^3 r^3 + D_{22}\alpha^4 r^4 = 0 \quad (3-136)$$

方程(3-136)可以解出4个特征根。方程(3-136)根可以标记为  $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。随着  $m$  和地基常数  $K$  的变化, 方程(3-136)特征根可能是共轭复数 ( $r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k$ ), 或2个实数 ( $r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1}$ )。采取相似步骤, 可得控制方程(3-136)的齐次补充解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} (W_{k,m} + W_{k+1,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{3km} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{4km} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (3-137)$$

考虑一般情况, 再设

$$W = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q e^{im\sigma\xi} e^{im\eta} \quad (3-138)$$

式中:  $s$  为特征根,  $n \neq 0$ 。

采取类似步骤,可得另一个特征方程(3-139)

$$\left(D_{22}\alpha^4 + \frac{K}{(n\pi)^4}\right) + 4D_{26}\alpha^3s + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2s^2 + 4D_{16}\alpha s^3 + D_{11}s^4 = 0 \quad (3-139)$$

特征方程(3-139)的根可标注为  $s_k, s_{k+1} (k=1, 3)$ 。

另一组齐次解可表示如下:

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{3kn} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{4kn} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} \quad (3-140)$$

## 2. 补充解求解

补充解形式与地基常数  $K$  相关联。

对于式(3-134), 当  $m=0$ , 可以根据式(3-141)求解一组补充解。

$$D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + Ka^4 W = 0 \quad (3-141)$$

式(3-141)有4个根:

$$a_0(1 \pm i), a_0(-1 \pm i)$$

式中:  $a_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{K}{D_{22}}} \frac{a}{\alpha}}$ 。

根据常微分方程理论,方程(3-141)有如下解:

$$W^* = \left( t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} \right) \sinh a_0 \eta + \left( t_3 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_4 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} \right) \sinh a_0 (1 - \eta) \quad (3-142)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数。

对于式(3-29), 当  $n=0$ , 可根据方程(3-143)求出另一组补充解:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^4 KW = 0 \quad (3-143)$$

方程(3-143)有4个特征根:

$$c_0(1 \pm i), c_0(-1 \pm i)$$

式中:  $c_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{K}{D_{11}}} a}$

方程(3-143)的解如下:

$$\begin{aligned} W^* = & \left( t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c_0} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} \right) \sinh c_0 \xi + \\ & \left( t_7 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c_0} + t_8 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} \right) \sinh c_0 (1 - \xi) \quad (3-144) \end{aligned}$$

考虑到矩形板有12个角点条件,引入如下一组补充解:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \quad (3-145) \end{aligned}$$

式中:  $m, n$  为整数。

将式(3-145)代入方程(3-133)可得:

$$\begin{aligned} & t_9 \left( (D_{11} (m \pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 r^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 + \right. \\ & \quad \left. D_{22} (n \pi)^4 \alpha^4 + K a^4 \right) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\ & \quad 4D_{16} (m \pi)^3 (n \pi) \alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn9} + B_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + \\ & \quad t_{10} \left( (D_{11} (m \pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 r^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{22}(n\pi)^4 \alpha^4 + Ka^4) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\
& 4D_{16}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn9} + B_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) + \\
& t_{11}((D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 r^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& D_{22}(n\pi)^4 \alpha^4 + Ka^4) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\
& 4D_{16}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn11} + B_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) + \\
& t_{12}((D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 r^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& D_{22}(n\pi)^4 \alpha^4 + Ka^4) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (4D_{26} \alpha^3 r^3 + \\
& 4D_{16}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta A_{mn12} + \\
& B_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) = 0
\end{aligned} \tag{3-146}$$

$$\cos m \pi \xi \cos n \pi \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mnkl} \sin k \pi \xi \sin l \pi \eta \tag{3-147}$$

$$C_{mnkl} = \begin{cases} \frac{16mn}{\pi^2(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)}, & \text{仅当 } m \pm k \text{ 和 } n \pm l \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \tag{3-148}$$

$$B_{mn9} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \eta \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \tag{3-149}$$

$$B_{mn10} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \eta \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \tag{3-150}$$

$$B_{mn11} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \tag{3-151}$$

$$B_{mn12} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \tag{3-152}$$

$A_{mn9}, A_{mn10}, A_{mn11}, A_{mn12}$  能由式(3-146)确定。 $l, k$  为整数。

这样全补充解可合写为如下形式：



$$\begin{aligned}
W^{***} = & \left( t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} \right) \sinh a_0 \eta + \\
& \left( t_3 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_4 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} \right) \sinh a_0 (1 - \eta) + \\
& \left( t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c_0} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} \right) \sinh c_0 \xi + \\
& \left( t_7 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c_0} + t_8 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} \right) \sinh c_0 (1 - \xi) + \\
& t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
& t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
& t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
& t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \quad (3-153)
\end{aligned}$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数。

### 3. 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解、特解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + \\
& W^{***} + W_0 \quad (3-154)
\end{aligned}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数。

地基上对称角铺设薄层合经典矩形板弯曲问题解析求解过程与横向弯曲问题类似。实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解(3-

154) 共有  $12M + 12$  个未知数。对于矩形板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0,0)$   $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M + 12$  个线性方程, 地基上对称角铺设纤维增强复合材料矩形板纵横向弯曲问题得解。

### 3.7 经典各向同性矩形板解析分析

各向同性板在工程领域广泛使用。与各向异性板相比, 各向同性板控制方程相对容易处理。新型复级数方法被用来分析各向同性板的弯曲、振动和屈曲问题, 本节给出一些解析解。

#### 1. 各向同性经典矩形板横向弯曲问题

各向同性经典矩形板横向弯曲问题控制方程为:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (3-155)$$

方程(3-155)可以无量纲化:

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2D\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = \frac{qa^4}{h} \quad (3-156)$$

设(3-156)有齐次解:

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\alpha\xi} \quad (3-157)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = Ge^{im\alpha\eta r} \quad (3-158)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(3-157)和式(3-158)代入方程(3-156)可得 4 阶特征

方程

$$1 + 2\alpha^2 r^2 + r^4 \alpha^4 = 0 \quad (3-159)$$

特征方程(3-159)可以解出4个根:

$$\pm b_1 i, \pm b_1 i$$

$$\text{式中: } b_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

采取相似步骤,挠度函数  $W$  齐次解写为下式:

$$\begin{aligned} W = & A_{1km} \sinh(m\pi b_1 \eta) \sin(m\pi \xi) + A_{2km} \cosh(m\pi b_1 \eta) \sin(m\pi \xi) + \\ & A_{3km} \sinh(m\pi b_1 \eta) \cos(m\pi \xi) + A_{4km} \cosh(m\pi b_1 \eta) \cos(m\pi \xi) + \\ & \eta(A_{5km} \sinh(m\pi b_1 \eta) \sin(m\pi \xi) + A_{6km} \cosh(m\pi b_1 \eta) \sin(m\pi \xi) + \\ & A_{7km} \sinh(m\pi b_1 \eta) \cos(m\pi \xi) + A_{8km} \cosh(m\pi b_1 \eta) \cos(m\pi \xi)) \end{aligned} \quad (3-160)$$

可以发现,式(3-160)包括可处理一对边简支板的 Levy 解。

引入适当变量变换,式(3-160)可以改写为:

$W =$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{3km} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{4km} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{5km} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{6km} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{7km} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{8km} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} \end{aligned} \quad (3-161)$$

采取类似步骤,可获得另一组齐次解:

$W =$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{3kn} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{4kn} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{5kn} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \cos n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{6kn} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \cos n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{7kn} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \cos n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{8kn} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \cos n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} +
 \end{aligned}
 \tag{3-162}$$

$\pm id_1, \pm id_1$  是特征方程(3-163)的4个特征根:

$$D\alpha^4 + 2D\alpha^2 s^2 + Ds^4 = 0 \tag{3-163}$$

式中:  $d_1 = \alpha_0$ .

据线性偏微分方程解的可叠加性原理,可将齐次解、补充解、特解组合起来,可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$W =$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} G_{3km} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{4km} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{3kn} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{4kn} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi \eta}{\sinh m \pi d_1} + \\
 & t_1 \eta (\xi - \xi^3) + t_2 (1 - \eta) (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + \\
 & t_3 \eta (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + t_4 (1 - \eta) (\xi - \xi^3) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_5 \xi (\eta - \eta^3) + t_6 (1 - \xi) (\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + \\
& t_7 \xi (\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + t_8 (1 - \xi) (\eta - \eta^3) + \\
& t_9 (1 - \xi) (1 - \eta) + t_{10} \eta (1 - \xi) + t_{11} \xi (1 - \eta) + t_{12} \xi \eta + W_0
\end{aligned}
\tag{3-164}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数,  $W_0$  为特解。

各向同性经典矩形板横向弯曲问题求解过程与各向异性板横向弯曲问题类似。实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (3-164) 共有  $12M+12$  个未知数。对于矩形板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M+12$  个线性方程, 各向同性经典矩形板横向弯曲问题得解。

## 2. 各向同性经典矩形板屈曲问题

各向同性经典矩形板屈曲问题控制方程为

$$\begin{aligned}
& D \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2D\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \\
& a^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (3-165)
\end{aligned}$$

式中:  $N_x, N_y, N_{xy}$  施加在板中面内单位宽度上的压力、剪力。

齐次解

设方程 (3-165) 有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \tag{3-166}$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = G e^{im\pi\eta} \tag{3-167}$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(3-166) ~ 式(3-167)代入方程(3-165)可得 4 阶特征方程

$$\left(D - \frac{a^2 N_x}{(m\pi)^2}\right) - \frac{2a^2 N_{xy} \alpha}{(m\pi)^2} r + 2D \left(\alpha^2 - \frac{a^2 N_y \alpha^2}{(m\pi)^2}\right) r^2 + Dr^4 \alpha^4 = 0 \quad (3-168)$$

特征方程(3-168)有 4 个特征根。

考虑矩形板承受一对边均布压力  $N_x$ , 方程(3-168)可改写为:

$$\left(1 - \frac{a^2 N_x}{(m\pi)^2 D}\right) + 2\alpha^2 r^2 + r^4 \alpha^4 = 0 \quad (3-169)$$

$$\alpha^2 r^2 = -1 \pm \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{m\pi}} \quad (3-170)$$

式(3-170)可改写为  $r_k, r_{k+1} (k=1, 3)$ :

$$r_1 = \begin{cases} b_1, & m < \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\pi}} \\ ib_1, & m > \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\pi}} \end{cases} \quad (3-171)$$

$$r_2 = \begin{cases} -b_1, & m < \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\pi}} \\ -ib_1, & m > \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\pi}} \end{cases} \quad (3-172)$$

$$r_3 = ib_2 \quad (3-173)$$

$$r_4 = -ib_2 \quad (3-174)$$

式中:

$$b_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{m\pi}} - 1}}{\alpha}$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{m\pi}} + 1}}{\alpha}$$

定义:

$$T = \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\pi}} \quad (3-175)$$

齐次解  $W^*$  可表示如下:

$$W^* =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m < T} G_{1km} \sin m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi + \sum_{m < T} G_{2km} \sin m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi + \\ & \sum_{m > T} G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m > T} G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{3km} \frac{\sinh m \pi b_2 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{4km} \frac{\sinh m \pi b_2 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_2} + \\ & \sum_{m < T} G_{5km} \sin m \pi b_1 \eta \cos m \pi \xi + \sum_{m < T} G_{6km} \sin m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi \xi + \\ & \sum_{m > T} G_{5km} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m > T} G_{6km} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{7km} \frac{\sinh m \pi b_2 \eta \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{8km} \frac{\sinh m \pi b_2 (1 - \eta) \cos m \pi \xi}{\sinh m \pi b_2} \end{aligned} \quad (3-176)$$

考虑一般情况, 设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi a \xi} e^{i n \pi \eta} \quad (3-177)$$

式中:  $s$  为特征根,  $n \neq 0$ 。

采取相似步骤, 可得另一个特征方程 (3-178)

$$D\alpha^4 + \left(2D\alpha^2 - \frac{a^2 N_x}{(n\pi)^2}\right)s^2 + Ds^4 = 0 \quad (3-178)$$

$$s^2 = -\left(\alpha^2 - \frac{N_x}{2D}\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2 - \frac{N_x}{2D}\frac{a^2}{(n\pi)^2}\right)^2 - \alpha^4} \quad (3-179)$$

方程(3-178)的特征根可标注为  $s_k, s_{k+1}$  ( $k=1,3$ )。伴随  $n$  和纵向载荷( $N_x, N_y, N_{xy}$ )的变化,方程(3-178)的特征根( $s_k, s_{k+1}$ )可能为复数根( $s_1 = c_1 + id_1, s_2 = c_1 - id_1, s_3 = c_2 + id_2, s_4 = c_2 - id_2$ )或实数根( $\pm d_1, \pm d_2$ )。

$$\text{如果} \quad \left(-\alpha^2 + \frac{N_x}{2D}\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\right)^2 - \alpha^4 > 0 \quad (3-180)$$

$$\text{则} \quad n < 0.5 \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\alpha \pi}} \quad (3-181)$$

定义常数:

$$S = 0.5 \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{a}{\alpha \pi}}$$

另一组齐次解可表示为如下实数级数形式:

$$\begin{aligned} W^* = & \sum_{n < S} Q_{1n} \sin m \pi d_1 \xi \sin m \pi \eta + \sum_{n < S} Q_{2n} \sin m \pi d_1 (1 - \xi) \sin m \pi \eta + \\ & \sum_{n < S} Q_{3n} \sin m \pi d_2 \xi \sin m \pi \eta + \sum_{n < S} Q_{4n} \sin m \pi d_2 (1 - \xi) \sin m \pi \eta + \\ & \sum_{n < S} Q_{5n} \sin m \pi d_1 \xi \cos m \pi \eta + \sum_{n < S} Q_{6n} \sin m \pi d_1 (1 - \xi) \cos m \pi \eta + \\ & \sum_{n < S} Q_{7n} \sin m \pi d_2 \xi \cos m \pi \eta + \sum_{n < S} Q_{8n} \sin m \pi d_2 (1 - \xi) \cos m \pi \eta + \\ & \sum_{n > S} Q_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sinh n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{3n} \frac{\sinh n \pi d_2 \xi \sin n \pi (c_2 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_2} + \\
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{4n} \frac{\sinh n \pi d_2 (1 - \xi) \sin n \pi (c_2 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_2} + \\
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{5n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \cos n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{6n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \cos n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{7n} \frac{\sinh n \pi d_2 \xi \cos n \pi (c_2 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_2} + \\
& \sum_{n>S}^{\infty} Q_{8n} \frac{\sinh n \pi d_2 (1 - \xi) \cos n \pi (c_2 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_2} \quad (3-182)
\end{aligned}$$

一对边承受载荷( $N_x$ )的矩形板控制方程的补充解

对于式(3-166),当 $m=0$ ,补充解(3-184)可通过求解方程(3-183)得到:

$$D \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = 0 \quad (3-183)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 \quad (3-184)$$

式中: $t_j(j=1,2,3,4)$ 是待定常数。

对于式(3-177),当 $n=0$ ,另一组补充解(3-186)可通过求解方程(3-185)得到:

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-185)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + g_3 \sin \gamma \xi + g_4 \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-186)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D_{11}}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上, 补充解合写为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_5(\xi - 0.5) + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + t_7(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + \\ & t_8(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + t_9((\xi - 0.5)^2 + h_{26}(\eta - 0.5)^4) + \\ & t_{10}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + h_{36}(\eta - 0.5)^5) + \\ & t_{11}\sin\gamma\xi + t_{12}\sin\gamma(1 - \xi) \end{aligned} \quad (3-187)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  是待定常数,  $h_{26} = -\frac{a^2 N_x}{12\alpha^4 D}$ ,  $h_{36} = -\frac{a^2 N_x}{60\alpha^4 D}$ 。

对应于不同的纵向载荷, 相应控制方程补充解形式可能会有所不同。

一对边承受载荷( $N_x$ )的各向同性矩形板屈曲问题一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m < T} G_{1km} \sin m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi + \sum_{m < T} G_{2km} \sin m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi + \\ & \sum_{m > T} G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \sum_{m > T} G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{3km} \frac{\sinh m \pi b_2 \eta \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} G_{4km} \frac{\sinh m \pi b_2 (1 - \eta) \sin m \pi \xi}{\sinh m \pi b_2} + \\ & \sum_{n < S} Q_{1n} \sin n \pi d_1 \xi \sin n \pi \eta + \sum_{n < S} Q_{2n} \sin n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi \eta + \\ & \sum_{n < S} Q_{3n} \sin n \pi d_2 \xi \sin n \pi \eta + \sum_{n < S} Q_{4n} \sin n \pi d_2 (1 - \xi) \sin n \pi \eta + \\ & \sum_{n > S} Q_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n>5}^{\infty} Q_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
& \sum_{n>5}^{\infty} Q_{3n} \frac{\sinh n \pi d_2 \xi \sin n \pi (c_2 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_2} + \\
& \sum_{n>5}^{\infty} Q_{4n} \frac{\sinh n \pi d_2 (1 - \xi) \sin n \pi (c_2 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_2} + \\
& t_1 + t_2 (\eta - 0.5) + t_3 (\eta - 0.5)^2 + t_4 (\eta - 0.5)^3 + \\
& t_5 (\xi - 0.5) + t_6 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + t_7 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5)^2 + \\
& t_8 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5)^3 + t_9 ((\xi - 0.5)^2 + h_{26} (\eta - 0.5)^4) + \\
& t_{10} ((\xi - 0.5)^2 (\eta - 0.5) + h_{36} (\eta - 0.5)^5) + t_{11} \sin \gamma \xi + \\
& t_{12} \sin \gamma (1 - \xi) \quad (3-188)
\end{aligned}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数。

实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (3-188) 共有  $12M+12$  个未知数  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$ 。对于矩形板屈曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M+12$  个线性方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \quad (3-189)$$

式中:  $K$  为  $(8M+12) \times (8M+12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, t_1, t_2, \dots, t_{12}\}$$

当方程 (3-188) 有异于零的解 (即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  不同时为 0), 需要  $(8M+12) \times (8M+12)$  矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的载荷即为屈曲载荷。值得指出的是, 需要求出最低的载荷值即临界载荷值。这样各向同性矩形板屈曲问题得解。

### 3. 各向同性矩形板纵横弯曲问题解析分析

各向同性矩形板纵横弯曲问题控制方程为

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = q \quad (3-190)$$

式中:  $N_x, N_y, N_{xy}$  为单位宽度的薄膜力、剪切力。

方程(3-190)可以无量纲化为

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2D\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \alpha^2 \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) = \frac{qa^4}{h} \quad (3-191)$$

齐次解

设方程(3-191)有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (3-192)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

设

$$f_m(\eta) = G e^{im\pi r \eta} \quad (3-193)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(3-192)和(3-193)代入方程(3-191)可得 4 阶控制方程:

$$\left( D + \frac{a^2 N_x}{(m\pi)^2} \right) + \left( \alpha \frac{2a^2 N_{xy}}{(m\pi)^2} \right) r + \left( 2D\alpha^2 + \frac{a^2 N_y \alpha^2}{(m\pi)^2} \right) r^2 + Dr^4 \alpha^4 = 0 \quad (3-194)$$

方程(3-194)有 4 个特征根。

考虑承受均布拉力  $N_x$  情况, 方程(3-194)可写为:

$$\left( 1 + \frac{a^2 N_x}{(m\pi)^2 D} \right) + 2\alpha^2 r^2 + r^4 \alpha^4 = 0 \quad (3-195)$$

$$\alpha^2 r^2 = -1 \pm \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \frac{a}{m\pi} \quad (3-196)$$

方程(3-195)的4个特征根可标记为  $r_k, r_{k+1} (k=1, 3)$ 。方程(3-195)有4个虚根 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1, r_3 = a_2 + ib_2, r_4 = a_2 - ib_2$ )。

齐次解  $W^*$  可表述如下:

$$\begin{aligned} W^* = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{3km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{4km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad (3-197) \end{aligned}$$

式中:  $G_{jkm} (j=1, 2, 3, 4, k=1, 2)$  为待定常数。

考虑到一般情况, 设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \omega \xi} e^{i n \nu \eta} \quad (3-198)$$

式中:  $s$  为特征根,  $n \neq 0$ 。

采用相似步骤, 可得另一个特征方程(3-199):

$$D\alpha^4 + \left( 2D\alpha^2 + \frac{a^2 N_x}{(n\pi)^2} \right) s^2 + Ds^4 = 0 \quad (3-199)$$

$$s^2 = - \left( \alpha^2 + \frac{N_x}{2D} \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 \right) \pm \sqrt{\left( \alpha^2 + \frac{N_x}{2D} \frac{a^2}{(m\pi)^2} \right)^2 - \alpha^4} \quad (3-200)$$

式(3-200)4个根可标注为  $s_k, s_{k+1} (k=1, 3)$ 。随着  $n$  和  $N_x$  变

化,特征方程(3-206)的特征根( $s_k, s_{k+1}$ )可能是两对共轭复数根( $s_k = id_k, s_{k+1} = -id_k, k=1, 2$ )。

$$d_1 = \sqrt{-\left(\alpha^2 + \frac{N_x}{2D}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\right)} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{N_x}{2D}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\right)^2 - \alpha^4}$$

$$d_2 = \sqrt{-\left(\alpha^2 + \frac{N_x}{2D}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\right)} - \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{N_x}{2D}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\right)^2 - \alpha^4}$$

另一组齐次解  $W^*$  可写为实数级数形式:

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi \eta}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{3kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{4kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi \eta}{\sinh n \pi d_k} \quad (3-201)$$

补充解

对于式(3-192),当  $m=0$ , 补充解可从方程。(3-202)求解出来:

$$D\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = 0 \quad (3-202)$$

$$W^* = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 \quad (3-203)$$

式中:  $t_j(j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数。

对于式(3-198),当  $n=0$ , 补充解可从方程(3-204)求解:

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^2 N_x \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3-204)$$

$$W^* = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + t_{11} \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma} + t_{12} \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma} \quad (3 - 205)$$

式中:  $g_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数,  $\gamma = a \sqrt{\frac{N_x}{D}}$ 。

在引入其他代数多项式基础上, 补充解合写为:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_5(\xi - 0.5) + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & t_7(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_8(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_9((\xi - 0.5)^2 + h_{26}(\eta - 0.5)^4) + t_{10}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + \\ & h_{36}(\eta - 0.5)^5) + t_{11} \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma} + t_{12} \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma} \end{aligned} \quad (3 - 206)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数,  $h_{26} = \frac{a^2 N_x}{12\alpha^4 D}$ ,  $h_{36} = \frac{a^2 N_x}{60\alpha^4 D}$

各向同性经典矩形板纵横弯曲一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi \eta}{\sinh n \pi d_k} + \\ & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_5(\xi - 0.5) + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_7(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_8(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^3 + \\
& t_9((\xi - 0.5)^2 + h_{26}(\eta - 0.5)^4) + \\
& t_{10}((\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + h_{36}(\eta - 0.5)^5) + \\
& t_{11} \frac{\sinh \gamma \xi}{\sinh \gamma} + t_{12} \frac{\sinh \gamma (1 - \xi)}{\sinh \gamma} \quad (3-207)
\end{aligned}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  是待定常数。

各向同性经典矩形板纵横弯曲问题求解过程与各向同性板横向弯曲问题类似。实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解(3-207) 共有  $12M+12$  个未知数。对于矩形板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M+12$  个线性方程, 各向同性经典矩形板纵横弯曲问题得解。



## 第4章 各向异性斜形板力学解析

众多工程结构可简化为各向异性结构,如航空工程中广泛采用的加筋板结构、复合材料板结构等。平行四边形的各向异性斜形板在飞行器工程中也获得的广泛应用,喷气飞机的箭形机翼就是一种斜形板。在建筑桥梁设计方面,各向异性斜板也有大量应用。但由于数学处理的困难,斜形板弯曲解析求解长期难于进行。对于各向异性斜板,板弯曲控制方程中又存在交叉刚度  $D_{16}$  和  $D_{26}$ ,更增加求解的困难。各向异性斜形板弯曲解析计算一直无法进行,这就限制了人们对斜形板力学性能的认识。近年来,各向异性板结构的解析求解方法获得进步,本章应用复级数方法给出了解析解,并针对承受均布载荷四边支撑的各向异性斜形板进行解析计算,讨论各向异性、斜角、各向异性角等参数对各向异性斜板挠度的影响,其结论可供设计参考,同时也给有限元结构计算提供验证算例。

### 4.1 斜板弯曲理论分析

考虑各向异性斜形板,板长为  $a$ ,板宽为  $b$ ,厚度为  $h$ ,斜角为  $\beta$ 。板在四边边界简支,板面承受均布载荷  $q$ 。坐标系变换见图 4-1。

在直角坐标系  $(xOy)$  中,各向异性板横向弯曲控制方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \end{aligned} \quad (4-1)$$

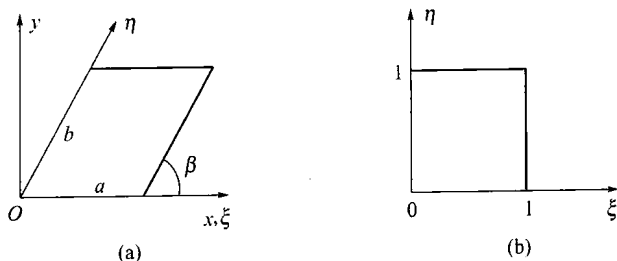


图 4-1 坐标系变换

### 1. 斜交坐标系( $\xi O\eta$ )变换

本书引入斜交坐标系( $\xi O\eta$ )及无量纲量

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (x - y \tan \beta) / a \\ \eta = y / (b \cos \beta) \\ \alpha = \frac{a}{b} \\ W(\xi, \eta) = \frac{w(x, y)}{h} \\ P = \frac{q a^4}{h} \end{array} \right. \quad (4-2)$$

在斜交坐标系中,式(4-1)可改写为

$$\begin{aligned} S_{40} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4S_{31} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2S_{22} \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ 4S_{13} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + S_{04} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = P \end{aligned} \quad (4-3)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{40} = D_{11} - 4D_{16} \cot \beta + 2(D_{12} + 2D_{66}) \cot^2 \beta - 4D_{26} \cot^2 \beta + D_{22} \cot^4 \beta \\ S_{31} = \frac{(3D_{26} \cot^2 \beta + D_{16} - (D_{12} + 2D_{66}) \cot \beta - D_{22} \cot^3 \beta)}{\sin \beta} \\ S_{22} = \left( \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{\sin^2 \beta} - \frac{6D_{26} \cot \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{3D_{22} \cot^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right) \\ S_{13} = D_{22} \left( \frac{1}{\sin \beta} \right)^4 \\ S_{04} = \left( \frac{D_{26}}{\sin^3 \beta} - \frac{D_{22} \cot \beta}{\sin^3 \beta} \right) \end{array} \right. \quad (4-4)$$

在直角坐标系中,简支边界条件的算式为

$$w = 0, M_n = M_x \cos^2 \theta_x + M_{xy} \sin 2\theta_x + M_y \sin^2 \theta_x = 0 \quad (4-5)$$

式中:  $\theta_x$  为边界法线与  $x$  轴的夹角。

在斜坐标系下,根据坐标转换,可将  $M_N$  用  $W$  关于  $\xi, \eta$  的偏导数表示,这样四边简支边界条件可表示如下:

$$\begin{cases} \xi = 0, 1, W = 0, M_\xi = 0 \\ \eta = 0, 1, W = 0, M_\eta = 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

上式中

$$\begin{cases} M_\xi = - \left( D_{11\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + D_{12\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2D_{16\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ M_\eta = - \left( D_{21\eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + D_{22\eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2D_{26\eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) \end{cases} \quad (4-7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_{11\xi} &= (D_{11} \sin^2 \beta + 2(D_{12} + 2D_{66}) \cos^2 \beta + D_{22} \cot^2 \beta \cos^2 \beta - \\ &\quad 4D_{16} \sin \beta \cos \beta - 4D_{26} \cos^2 \beta \cot \beta) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \\ D_{12\xi} &= (D_{12} + D_{22} \cot^2 \beta - 2D_{26} \cot \beta) \alpha^2 \left( \frac{h}{a} \right)^2 \\ D_{16\xi} &= (- (D_{12} + 2D_{66}) \cos \beta + 3D_{26} \cot \beta \cos \beta - \\ &\quad D_{22} \cot^2 \beta \cos \beta + D_{16} \sin \beta) \alpha \left( \frac{h}{a} \right)^2 \\ D_{21\eta} &= (D_{12} + D_{22} \cot^2 \beta - 2D_{26} \cot \beta) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \\ D_{22\eta} &= D_{22} \alpha^2 / \sin^2 \beta \left( \frac{h}{a} \right)^2 \\ D_{26\eta} &= \left( \frac{-D_{22} \cot \beta}{\sin \beta} + \frac{D_{26}}{\sin \beta} \right) \alpha \left( \frac{h}{a} \right)^2 \end{aligned} \right. \quad (4-8)$$

在斜形板各角点  $((0,0), (1,0), (1,1), (0,1))$  处,板挠度、转角及弯矩  $(M_\xi, M_\eta)$  或综合剪力均应满足角点条件约束,这样总共有 12 个角点条件。

## 2. 斜形板横向弯曲斜形板横向弯曲一般解析解

斜形板横向弯曲问题求解在数学上可归结为求解偏微分方程式 (4-3) 边界条件及角点条件下的边值问题, 按照本书第 3 章的求解步骤, 可得斜形板横向弯曲问题一般解析解:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{1km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 G_{2km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{1kn} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 Q_{2kn} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + W_1 + W_0 \end{aligned} \right. \quad (4-9)$$

式中:  $W_1$ ——补充解, 有

$$\begin{aligned} W_1 = & t_1(\eta(\xi - \xi^3) + t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_2((1-\eta)(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_3(\eta(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) - t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_4((1-\eta)(\xi - \xi^3) - t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_5(\xi(\eta - \eta^3) + t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_6((1-\xi)(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_7(\xi(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) - t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_8((1-\xi)(\eta - \eta^3) - t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)) + \\ & t_9(1-\xi)(1-\eta) + t_{10}\eta(1-\xi) + t_{11}\xi(1-\eta) + t_{12}\xi\eta \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$\text{其中: } t_{16} = \frac{3S_{31}}{S_{22}\alpha}, t_{26} = \frac{3\alpha S_{13}}{S_{22}};$$

$A_{km}, B_{km} (k=1, 4), t_i (i=1, 12)$ ——待定系数;

$W_0$ ——式(4-3)的特解;

$m, n$ ——正整数。

对于均匀载荷  $P$ ,

$$W_0 = \frac{P}{50} \left( \frac{\xi^2(1-\xi)^2}{S_{40}} + \frac{\eta^2(1-\eta)^2}{S_{04}\alpha^4} + \frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{4S_{22}\alpha^2} \right) \quad (4-11)$$

$a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2$  ( $i$  为虚数单位) 为下列特征方程的特征根  $r_{1,2}, r_{3,4}$ :

$$S_{40} + 4S_{31}r\alpha + 2S_{22}\alpha^2r^2 + 4S_{13}\alpha^3r^3 + S_{04}r^4\alpha^4 = 0 \quad (4-12)$$

$c_1 \pm id_1, c_2 \pm id_2$  ( $i$  为虚数单位) 为下列特征方程的特征根  $s_{1,2}, s_{3,4}$ :

$$S_{40}s^4 + 4S_{31}s^3\alpha + 2S_{22}\alpha^2r^2 + 4S_{13}sr^3 + S_{04}\alpha^4 = 0 \quad (4-13)$$

实际计算中, 设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解(4-9) 共有  $8M+12$  个未知数。对于斜形板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数。根据正弦级数的正交性, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在 4 个角点处建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M+12$  个线性方程, 可以求解  $8M+12$  个未知数, 这样各向异性斜形板横向弯曲问题得解。

### 3. 求解程序

本章选取均布载荷下的四边简支斜形板和一对边简支一对边固支斜形板进行计算分析。这样情况下, 在斜坐标系下, 边界条件、载荷均满足中心对称条件, 挠度亦满足中心对称条件:

$$W(\xi, \eta) = W(1-\xi, 1-\eta) \quad (4-14)$$

这样, 式(4-9)、式(4-10)中系数满足以下条件

$$A_{1m} = A_{2m}, A_{3m} = A_{4m}, B_{1n} = B_{2n}, B_{3n} = B_{4n}, t_1 = t_2, \\ t_3 = t_4, t_5 = t_6, t_7 = t_8, t_9 = t_{12}, t_{11} = t_{10} \quad (4-15)$$

在中心对称条件满足的情况下, 相应边界条件可简化如下。

四边简支板边界条件:

$$\xi = 0, W = 0, M_\xi = 0; \quad (4-16)$$

$$\eta = 0, W = 0, M_{\eta} = 0 \quad (4-17)$$

角点条件:

$$W(0,0) = 0, W(1,0) = 0, M_{\xi}(0,0) = 0 \quad (4-18)$$

$$M_{\xi}(1,0) = 0, M_{\eta}(0,0) = 0, M_{\eta}(1,0) = 0 \quad (4-19)$$

实际计算中,设  $m = n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 将挠度为 0 的角点条件代入式(4-9), 可得  $t_9 = t_{10} = t_{11} = t_{12} = 0$ 。考虑中心对称条件式(4-14), 解析解式(4-9)共有  $4M + 4$  个未知数。对于斜形板弯曲问题, 共有 4 个独立的边界条件。将解析解代入 4 个边界条件中, 形成 4 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数。根据正弦级数的正交性, 可以得到  $4M$  个线性代数方程; 在两个角点  $(0,0)$ 、 $(1,0)$ , 根据该处弯矩平衡条件可有 4 个角点条件, 又可建立 4 个线性方程, 这样总共建立  $4M + 4$  个线性方程, 可以求解  $4M + 4$  个未知数。引入中心对称条件后, 计算参数减少了一半。

## 4.2 斜板弯曲一般解数值计算分析

### 1. 数值部分

首先针对承受均布载荷的各向同性斜薄板做验证计算。各向同性材料的材料参数如下:

$$E_1 = 10\text{GPa}, E_2 = 10\text{GPa}, \gamma_{12} = 0.3, G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})},$$

$$D = \frac{h^3 E_1}{12(1 - \nu_{12}^2)}$$

斜板斜角为  $\beta$ , 验证计算中斜角取 3 个值, 计算结果列入表 4-1 中。结果表明本书解析解与参考解一致。

下面依照上述理论方法进行具体数值计算, 以分析各向异性角  $\theta$ 、斜角  $\beta$ 、各向异性程度对斜形板弯曲状态的影响。

选择玻璃/环氧树脂(弱各向异性材料)、石墨/环氧树脂(强各向异性材料)进行分析。其材料参数见表 4-2。

表 4-1 本书解与参考解比较  $\left( W^{**} = \frac{10^3 w_{\text{中心}} D}{qa^4} \right)$

各向同性斜板	模 型	$a/b = 1$	$W^{**}$
$\beta = 90^\circ$	本书解参考解 *	$M = 30$	4. 06
			4. 06
$\beta = 60^\circ$	本书解参考解 *	$M = 30$	2. 57
			2. 56
$\beta = 45^\circ$	本书解参考解 *	$M = 30$	1. 33
			1. 35

\* C. Rajamonhan and J. Raamachandran,1997. Boundary Element Analysis of Skew Plates Usinga New Fundamental Solution, Mechanic Research Communications,24(4) ,407 – 414.

表 4-2 材料参数

复 合 材 料	$E_1/\text{GPa}$	$E_2/\text{GPa}$	$G_{12}/\text{GPa}$	$\gamma_{12}$
玻璃/环氧	38.6	8.27	4.14	0.26
石墨/环氧	181	10.3	7.17	0.28

取  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = 10^4\text{N/m}^2$ , 计算中取  $M = 40$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , 本书给出表 4-3 考察四边简支 (SSSS) 单层斜形玻璃/环氧板挠度  $w$  总体分布及挠度边界的满足情况。

表 4-3 玻璃/环氧 (CCCC) 单层斜形板挠度 ( $10^3 w$ ) 分布

$\eta \backslash \xi$	0.0	0.2	0.5	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	2.468	4.558	2.957	0.000
0.5	0.000	4.125	6.943	4.125	0.000
0.8	0.000	2.957	4.558	2.468	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

取  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = 10^4\text{N/m}^2$ , 计算中取  $M = 50$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ , 本书给出表 4-4 考察 CSCS 单层斜形玻璃/环氧板挠度  $w$  总体分布及挠度边界的满足情况。

表 4-4 玻璃/环氧 CSCS 单层斜形板挠度 ( $10^3 w$ ) 分布

$\eta \backslash \xi$	0.0	0.2	0.5	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.314	1.308	0.084	0.000
0.5	0.000	1.033	2.559	1.033	0.000
0.8	0.000	0.084	1.308	0.314	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

验证计算选取一层玻璃/环氧斜形简支层合板 ( $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ),  $q = 10^4\text{N/m}^2$ , 解数值稳定性验证计算结果

见表 4-5,  $w^* = \frac{10^3 E_2 h^3 \omega}{q a^3 b \sin \beta}$ , 下同。

表 4-5 单层玻璃/环氧斜形板中心挠度  $w^*$

边界	$M = 30$	$M = 40$	$M = 50$	$M = 60$
SSSS	8.259	8.258	8.258	8.258

验证计算选取一层玻璃/环氧斜形一边简支临边固支层合板 ( $a = 2$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ),  $q = 10^4\text{N/m}^2$ , 解数值稳定性验证

计算结果见表 4-6,  $w^* = \frac{10^3 E_2 h^3 \omega}{q a^3 b \sin \beta}$ , 下同。

表 4-6 单层玻璃/环氧 CSCS 板中心挠度  $w^*$

边界	$M = 30$	$M = 40$	$M = 50$	$M = 60$
CSCS	0.2278	0.2275	0.2273	0.2273

本书数值计算结果写在表 4-7, 计算中取  $M = 40$ 。表 4-7 给出具有不同斜角 ( $\beta = 80^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ ) 的玻璃/环氧、石墨/环氧 SSSS



菱形板无量纲中心挠度  $W^*$  随铺设角变化的关系。

表 4-7 SSSS 菱形板无量纲中心挠度  $w^*$

$\theta/(^{\circ})$ \ $\beta/(^{\circ})$	80°		60°		45°		30°	
	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧
0	22.961	11.020	19.061	8.258	13.633	7.115	8.221	4.560
10	22.148	8.069	17.727	6.778	12.644	5.520	7.248	3.662
20	20.979	7.887	16.061	5.777	11.258	4.256	6.764	2.719
30	19.807	7.920	14.646	5.409	10.056	2.908	3.878	1.447
40	19.001	5.639	13.861	3.924	5.839	2.323	2.580	1.014
50	18.532	4.891	8.246	3.198	5.283	1.789	2.061	0.719
60	19.001	5.639	7.726	2.843	4.548	1.394	1.663	0.496
67.5	19.558	7.992	8.142	3.051	4.361	1.290	1.474	0.390
70	19.807	7.920	8.246	3.198	4.382	1.302	1.437	0.369
80	20.979	7.887	13.861	3.924	4.859	1.563	1.437	0.369
85	21.585	7.942	14.130	4.314	5.283	1.789	1.524	0.418
90	22.148	8.069	14.646	5.409	5.796	2.046	1.663	0.496

计算中取  $M=50$ 。表 4-8、表 4-9 分别给出板具有不同铺设层数 ( $N=1,3,5,79$ ) 的玻璃/环氧、石墨/环氧 CSCS 菱形板,斜角为  $70^{\circ}$ 、 $45^{\circ}$  的板无量纲中心挠度  $W^*$  随铺设角变化的关系。表 4-10 给出具有不同铺设层数 ( $N=1,3,5,79$ ) 的玻璃/环氧、石墨/环氧 CSCS 斜形板 ( $a=2\text{m}, b=1\text{m}$ ),斜角为  $60^{\circ}$  的板无量纲中心挠度  $W^*$  随铺设角变化的趋势。

表 4-8 斜角为  $70^{\circ}$  的 CSCS 菱形板无量纲中心挠度  $w^*$

$\theta/(^{\circ})$ \ $N$	1		3		5		79	
	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧
0	7.046	1.916	7.046	1.916	7.046	1.916	7.046	1.916
10	5.832	1.618	5.875	1.638	6.087	1.736	6.483	1.922
20	5.555	1.532	5.611	1.560	5.908	1.691	6.540	1.968
30	5.648	1.620	5.702	1.647	6.008	1.765	6.750	2.071

(续)

$\theta / (^{\circ})$	1		3		5		79	
$N$	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧
40	6.100	1.901	6.140	1.904	6.414	1.968	7.192	2.271
45	6.462	2.127	6.494	2.111	6.743	2.129	7.522	2.427
50	6.914	2.421	6.939	2.376	7.163	2.342	7.936	2.629
60	8.067	3.213	8.084	3.110	8.295	2.961	9.034	2.219
70	9.447	4.184	9.519	4.087	9.729	3.892	10.395	4.108
80	10.974	5.039	11.675	5.016	11.214	4.984	11.675	5.149
90	12.252	5.699	12.252	5.699	12.252	5.699	12.252	5.699

表 4-9 斜角为  $45^{\circ}$  的 CSCS 菱形板无量纲中心挠度  $w^*$ 

$\theta / (^{\circ})$	1		3		5		79	
$N$	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧
0	4.905	2.002	4.905	2.002	4.905	2.002	4.905	2.002
10	3.912	1.300	3.963	1.329	4.214	1.484	4.682	1.806
20	3.159	0.920	3.224	0.953	3.561	1.118	4.251	1.495
30	2.695	0.735	2.763	0.767	3.111	0.921	3.861	1.268
40	2.486	0.667	2.551	0.700	2.890	0.840	3.636	1.155
45	2.466	0.667	2.529	0.701	2.860	0.834	3.596	
50	2.515	0.691	2.557	0.722	3.072	0.851	3.605	1.145
60	2.716	0.816	2.771	0.841	3.072	0.956	3.760	1.238
70	3.141	1.062	3.189	1.080	3.466	1.181	4.054	1.440
80	3.771	1.438	3.804	1.454	4.006	1.541	4.392	1.732
90	4.569	1.904	4.569	1.904	4.569	1.904	4.569	0.265

表 4-10 斜角为  $60^{\circ}$  的 CSCS 斜形板无量纲中心挠度  $w^*$  $(a = 2m, b = 1m)$ 

$\theta / (^{\circ})$	1		3		5		79	
$N$	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧
0	0.408	0.190	0.408	0.190	0.408	0.318	0.408	0.318
10	0.349	0.157	0.350	0.158	0.354	0.161	0.361	0.170

(续)

$N \backslash \theta / (^{\circ})$	1		3		5		79	
	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧	玻璃/环氧	石墨/环氧
20	0.307	0.128	0.307	0.126	0.309	0.125	0.319	0.133
30	0.268	0.109	0.267	0.105	0.265	0.097	0.274	0.101
40	0.239	0.097	0.236	0.090	0.230	0.079	0.235	0.080
45	0.227	0.091	0.224	0.084	0.216	0.072	0.220	0.072
50	0.217	0.084	0.213	0.078	0.205	0.067	0.207	0.066
60	0.197	0.069	0.194	0.066	0.187	0.059	0.187	0.057
70	0.178	0.056	0.178	0.055	0.175	0.051	0.173	0.051
80	0.166	0.047	0.166	0.048	0.165	0.047	0.166	0.047
90	0.163	0.045	0.163	0.045	0.163	0.045	0.163	0.045

针对石墨/环氧斜形板所做一些计算结果反映在图4-2~图4-4中。

## 2. 数值结果分析结论

通过对表4-7~表4-10、图4-2~图4-4的分析,可以得到以下结论:

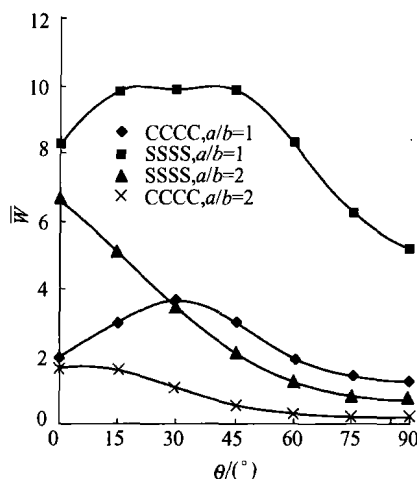


图4-2 承受均布载荷 $q$ 的对称角铺设单层斜板中心无量纲挠度与铺设角变化

$$\left( h/a = 0.01, b = 1\text{m}, \beta = 60^{\circ}; \bar{W} = \frac{10^3 w E_2 h^3}{q a^3 b \sin \beta} \right)$$

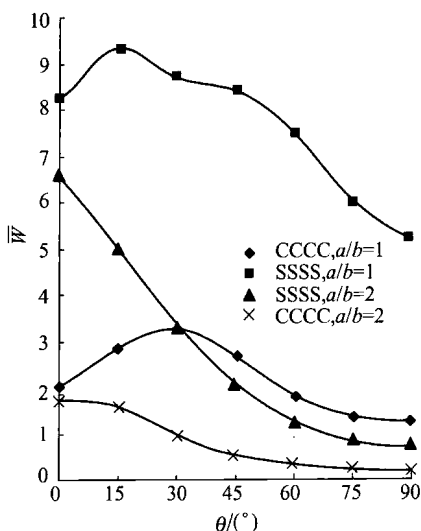


图 4-3 承受均布载荷  $q$  的对称角铺设  $[\theta/-\theta/\theta]$  三层斜板中心  
无量纲挠度与铺设角变化

$$\left( h/a = 0.01, b = 1\text{m}, \beta = 60^{\circ}, \bar{W} = \frac{10^3 w E_2 h^3}{q a^3 b \sin \beta} \right)$$

(1) 本书解可很好地满足边界条件,收敛性良好。当  $M$  增大时,解数值保持稳定,稳定性好;计算中发现,对于本章涉及的材料、载荷、边界约束情况,  $M$  取 50 可以满足精度要求,故本章数值计算均取  $M$  为 50。

(2) 铺设角  $\theta$  对角铺设层合菱形板刚度有重大影响:对于 CSCS 菱形板,板刚性在铺设角  $\theta$  为  $90^{\circ}$  及  $0^{\circ}$  时相对较小,挠度较大,板刚性在铺设角  $\theta$  为  $45^{\circ}$  时相对较大,挠度较小,对其他具有斜角的单层斜形板进行计算也发现板刚性在铺设角  $\theta$  为  $0^{\circ}$  与  $90^{\circ}$  之间的某一角度时为最大,但从制造角度来看,一般认为取  $45^{\circ}$  铺设角的角铺设层合板可获得较大刚度。对于 SSSS 菱形板,板中心挠度在铺设角  $\theta$  为  $90^{\circ} - \beta/2$  时最小,板刚性最大,同时当板各向异性角  $\theta$  关于  $90^{\circ} - \beta/2$  成对称时,板中心挠度亦相同,经计算这一结论对其他具有斜角的单层菱形板也成立。

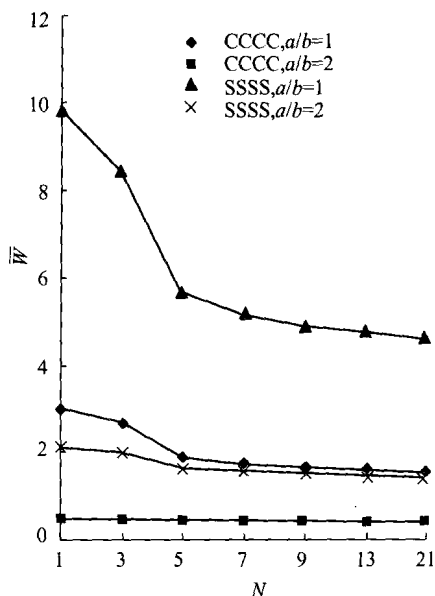


图 4-4 承受均布载荷  $q$  的对称角铺设斜板中心无量纲挠度与铺设层数变化

$$\left( h/a = 0.01, b = 1\text{m}, \beta = 60^\circ, \theta = 45^\circ; \bar{W} = \frac{10^3 w E_2 h^3}{q a^3 b \sin \beta} \right)$$

(3) 跨宽比  $\alpha$  影响着对称角叠层板刚度分布。对于斜形板(跨宽比  $\alpha > 1$ )，铺设角  $\theta$  对对称角叠层板刚度的影响与菱形板(跨宽比  $\alpha = 1$ )不同，当纤维方向与矩形板长简支边界方向一致时(铺设角  $\theta = 0^\circ$ )，矩形板挠度最大，刚性最差，铺设角  $\theta$  从  $0^\circ$  增加到  $90^\circ$ ，矩形板刚性依次迅速增大，反映在表 4-6 中，板中心挠度减小。

(4) 铺设层数  $N$  改变了对称角叠层板的刚度。对于跨宽比  $\alpha > 1$  的斜形板，铺设层数  $N$  对板中心挠度影响不大，略有起伏。而对于菱形板，随着铺设层数  $N$  的增加，对于大多数铺设角的层合板中心挠度不同程度地增加，这是与矩形层合板的不同之处。

(5) 斜角增大，层合板挠度受铺设角影响程度减小，如具有  $45^\circ$  斜角 CSCS 的斜形板最大挠度与最小挠度之比大于  $70^\circ$  斜角的斜形板相应数值。这说明对于小斜角层合板需要更详细地计算设计。同样，对

于 SSSS 菱形板,斜角越小,板中心挠度随铺设角  $\theta$  变化越剧烈,如斜角为  $80^\circ$  的石墨/环氧菱形板中心挠度的最大值与最小值之比小于 2,而斜角为  $30^\circ$  的石墨/环氧菱形板中心挠度的最大值与最小值之比大于 10。

(6) 各向异性加剧了层合板刚度的可设计性。对于强各向异性材料制成的层合板,板刚性受铺设角  $\theta$ 、铺设层数  $N$ 、跨宽比  $\alpha$  的影响更为显著。

### 4.3 对称角铺设薄层合经典斜形板振动解析分析

考虑斜形层合板自由振动问题。本节应用新型复级数法求解对称角铺设薄层合经典斜形板振动问题,并建立振动问题一般解析解。

#### 1. 斜坐标系下的振动控制方程

直角坐标系下,对称角铺设薄层合经典斜形板振动问题控制方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho \omega^2 w = 0 \end{aligned} \quad (4-20)$$

式中:  $\omega$  为振动频率;  $\rho$  为板单位面积密度。

应用坐标变换式 (4-2), 控制方程 (4-20) 可变换到斜坐标系  $\xi, \eta$  下:

$$\begin{aligned} S_{40} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4S_{31} \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2S_{22} \alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \\ 4S_{13} \alpha^3 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^3 \partial \xi} + S_{04} \alpha^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \rho a^4 \omega^2 w = 0 \end{aligned} \quad (4-21)$$

## 2. 求解过程

### 齐次解

式(4-21)可以改写为

$$S_{40} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 4S_{31} \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2S_{22} \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4S_{13} \alpha^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + S_{04} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^4 \rho \omega^2 W = 0 \quad (4-22)$$

设方程(4-22)有如下齐次解:

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\alpha\xi} \quad (4-23)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = G e^{im\alpha\eta} \quad (4-24)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(4-23)和式(4-24)代入方程(4-22)可得 4 阶特征方程:

$$\left( S_{40} - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{(m\pi)^4} \right) + 4S_{31} \alpha r + 2S_{22} \alpha^2 r^2 + 4S_{13} \alpha^3 r^3 + S_{04} \alpha^4 r^4 = 0 \quad (4-25)$$

式(4-25)有 4 个特征根。方程(4-25)根可以标记为  $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。随着  $m$  和频率  $\omega$  组合的变化, 方程(4-25)特征根可能是 4 个共轭复数 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1, r_3 = a_3 + ib_3, r_4 = a_3 - ib_3$ ), 或者是 2 个实数根 ( $r_3 = a_3, r_4 = a_4$ ), 1 对共轭复数根 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1$ )。

采取与第 3 章类似步骤, 可得挠度函数  $W^*$  的一组齐次解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} (W_{k,m} + W_{k+1,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) +$$

$$G_{3km} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{4km} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (4-26)$$

考虑到一般情况,再设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \sigma s \xi} e^{i n \sigma c \eta} \quad (4-27)$$

式中:  $s$  为特征根,  $n \neq 0$ 。

采取相似步骤,可得另一个特征方程(4-28):

$$\left( S_{04} - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{(n\pi)^4} \right) + 4S_{13} s \alpha + 2S_{22} s^2 \alpha^2 + 4S_{31} \alpha^3 s^3 + S_{40} \alpha^4 s^4 = 0 \quad (4-28)$$

式(4-28)有4个特征根。方程(4-25)根可以标记为  $s_k, s_{k+1}$  ( $k=1, 3$ )。随着  $n$  和频率  $\omega$  组合的变化, 方程(4-28)特征根可能是共轭复数( $s_k = c_k + id_k, s_{k+1} = c_k - id_k$ ), 或者是成对的实数根( $s_k = c_k, s_{k+1} = c_{k+1}$ )。

这样,另一组齐次解可写为:

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{3kn} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{4kn} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} \quad (4-29)$$

补充解

振动方程补充解与振动频率  $\omega$  有关联。

对于式(4-23), 当  $m=0$ , 方程(4-22)可简化为(4-30), 根据常微分方程理论可以从方程(4-30)求解出补充解。

$$S_{04} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^4 \rho \omega^2 W = 0 \quad (4-30)$$

方程(4-30)有4个特征根:

$$\pm a_0, \pm ia_0$$

$$\text{式中: } a_0 = a \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{S_{04}}} \sqrt{\omega}}.$$

方程(4-30)的解如下:



$$W^* = t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} + t_3 \sin a_0 \eta + t_4 \sin a_0 (1 - \eta) \quad (4-31)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4)$  是待定常数。

考虑式(4-27)中  $n$  为 0 情况, 另一组补充解可从方程(4-32)推导求解。

$$S_{40} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^4 \omega^2 \rho W = 0 \quad (4-32)$$

方程(4-32)有 4 个特征根:

$$\pm c_0, \pm ic_0$$

式中:  $c_0 = a \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{S_{40}}} \omega}$

方程(4-32)解可表示如下:

$$W^* = t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} + t_7 \sin c_0 \xi + t_8 \sin c_0 (1 - \xi) \quad (4-33)$$

考虑到斜形板有 12 个角点条件, 引入如下一组补充解:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \end{aligned} \quad (4-34)$$

式中:  $m, n$  为整数。

将式(4-34)代入方程(4-22) 可得:

$$t_9 ((S_{40} (m \pi)^4 + 2S_{22} \alpha^2 (m \pi)^2 (n \pi)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& S_{04}(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta + \\
& (4S_{13}\alpha^3 m\pi(n\pi)^3 + 4S_{31}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta A_{mn9} + \\
& B_{mn9} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta) + \\
& t_{10}((S_{40}(m\pi)^4 + 2S_{22}\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& S_{04}(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta + \\
& (4S_{13}\alpha^3 m\pi(n\pi)^3 + 4S_{31}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta A_{mn10} + \\
& B_{mn10} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta) + t_{11}((S_{40}(m\pi)^4 + 2S_{22}\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& S_{04}(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta + \\
& (4S_{13}\alpha^3 m\pi(n\pi)^3 + 4S_{31}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta A_{mn11} + \\
& B_{mn11} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta) + t_{12}((S_{40}(m\pi)^4 + 2S_{22}\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& S_{04}(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta + \\
& (4S_{13}\alpha^3 m\pi(n\pi)^3 + 4S_{31}(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta) A_{mn12} + \\
& B_{mn12} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta) = 0 \quad (4-35)
\end{aligned}$$

$$\cos m\pi\xi \cos n\pi\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mnkl} \sin k\pi\xi \sin l\pi\eta \quad (4-36)$$

$$C_{mnkl} = \begin{cases} \frac{16mn}{\pi^2(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)}, & \text{仅当 } m \pm k \text{ 和 } n \pm l \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (4-37)$$

$$B_{mn9} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \eta \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta d\xi d\eta \quad (4-38)$$

$$B_{mn10} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \eta \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta d\xi d\eta \quad (4-39)$$

$$B_{mn11} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta d\xi d\eta \quad (4-40)$$

$$B_{mn12} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta d\xi d\eta \quad (4-41)$$

$A_{mn9}, A_{mn10}, A_{mn11}, A_{mn12}$  可以从方程 (4-35) 求得。 $l, k$  为整数。

这样全补充解可以合写如下:

$$\begin{aligned}
 W^{**} = & t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} + t_3 \sin a_0 \eta + t_4 \sin a_0 (1 - \eta) + \\
 & t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c_0} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} + t_7 \sin c_0 \xi + t_8 \sin c_0 (1 - \xi) + \\
 & t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
 & t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
 & t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
 & t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right)
 \end{aligned} \tag{4-42}$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数。

### 3. 对称角铺设薄层合经典斜形板振动问题一般解析解

振动问题一般解析解可以参照矩形板振动问题解析解构建。据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi$ 、 $\eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**}
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数。

振动问题求解过程也类似于屈曲问题求解。实际计算中, 设  $m =$

$n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (4-88) 共有  $12M + 12$  个未知数  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$ 。对于斜形板振动问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M + 12$  个线性方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\}$$

式中:  $K$  为  $(8M + 12) \times (8M + 12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, t_1, t_2, \dots, t_{12}\}$$

当上式有异于零的解 (即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  即为所求频率。

## 4.4 经典各向同性斜形板解析分析

各向同性斜形板在工程中应用广泛, 但各向同性斜形板同样难以求解。本节应用新型复级数方法解析研究了各向同性经典斜形板, 并给出一些解析解。

### 1. 经典各向同性斜形板横向弯曲解析分析

直角坐标系下, 斜形板横向弯曲控制方程为

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (4-44)$$

方程 (4-44) 在斜坐标系下可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - 4\cos\alpha\beta \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(1 + 2\cos^2\beta)\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} - \\ 4\cos\alpha^3\beta \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = \frac{qa^4}{Dh} \end{aligned} \quad (4-45)$$

设方程(4-45) 有如下齐次解

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (4-46)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(\eta) = G e^{im\pi\eta r} \quad (4-47)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(4-46) 和(4-47) 代入方程(4-45) 可得 4 阶特征方程:

$$1 - 4\alpha\cos\beta + 2(1 + 2\cos^2\beta)\alpha^2 r^2 - 4\alpha^3 r^3 \cos\beta + \alpha^4 r^4 = 0 \quad (4-48)$$

方程(4-48) 有 4 个特征根:

$$a_1 \pm b_1 i, \quad a_1 \pm b_1 i \quad (4-49)$$

式中:  $a_1 = -\frac{1}{\alpha}\cos\beta, b_1 = \frac{1}{\alpha}$ 。

采取类似步骤, 可得挠度函数  $W$  齐次解:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=1}^{\infty} G_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{3m} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{4m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{5m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} G_{6m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{7m} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{8m} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} \quad (4-50)$$

考虑一般情况, 设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi s \xi} e^{i n \pi \eta} \quad (4-51)$$

式中:  $s$  是特征根,  $n \neq 0$ 。

采取类似步骤, 可得另一个特征方程(4-52):

$$1 - 4 \frac{s}{\alpha} \cos \beta + 2(1 + 2 \cos^2 \beta) \frac{s^2}{\alpha^2} - 4 \frac{s^3}{\alpha^3} \cos \beta + \frac{s^4}{\alpha^4} = 0 \quad (4-52)$$

方程(4-52)可解出 4 个根:

$$c_1 \pm d_1 i, \quad c_1 \pm d_1 i \quad (4-53)$$

式中:  $c_1 = -\alpha \cos \beta$ ,  $d_1 = \alpha$ 。

采取相似步骤, 可得另一组  $W$  齐次解:

$$W^* = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{3n} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{4n} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{5n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \cos n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{6n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \cos n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{7n} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \cos n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{8n} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \cos n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} \quad (4-54)$$

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi$ 、 $\eta$  形式表示的一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} G_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{3m} \eta \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{4m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{3n} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{4n} \xi \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} +$$

$$t_1 (\eta (\xi - \xi^3) + t_{16} \xi (1 - \xi) \eta (1 - \eta)) +$$

$$t_2 ((1 - \eta) (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + t_{16} \xi (1 - \xi) \eta (1 - \eta)) +$$

$$t_3 (\eta (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) - t_{16} \xi (1 - \xi) \eta (1 - \eta)) +$$

$$t_4 ((1 - \eta) (\xi - \xi^3) - t_{16} \xi (1 - \xi) \eta (1 - \eta)) +$$

$$\begin{aligned}
& t_5(\xi(\eta - \eta^3) + t_{26}\xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta)) + \\
& t_6((1 - \xi)(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + t_{26}\xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta)) + \\
& t_7(\xi(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) - t_{26}\xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta)) + \\
& t_8((1 - \xi)(\eta - \eta^3) - t_{26}\xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta)) + \\
& t_9(1 - \xi)(1 - \eta) + t_{10}\eta(1 - \xi) + t_{11}\xi(1 - \eta) + t_{12}\xi\eta + W_0
\end{aligned} \tag{4-55}$$

式中:  $G_{km}, Q_{kn}, Q_{2kn} (k=1, 2, 3, 4), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数,  $W_0$  为特解。

$$t_{16} = \frac{-3\cos\beta}{(1 + 2\cos^2\beta)\alpha}, \quad t_{26} = \frac{-3\alpha\cos\beta}{(1 + 2\cos^2\beta)}.$$

实际计算中, 设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解(4-55)共有  $8M+12$  个未知数。对于斜形板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数。根据正弦级数的正交性, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在 4 个角点处建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M+12$  个线性方程, 可以求解  $8M+12$  个未知数, 这样各向同性斜形板横向弯曲问题得解。

## 2. 各向同性经典斜形板振动解析分析

本节研究各向同性经典斜形板振动问题。

各向同性经典斜形板振动问题控制方程为

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho \omega^2 W = 0 \tag{4-56}$$

式中:  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位密度。

方程(4-56)可以在斜坐标系下写为:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - 4\alpha\cos\beta \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(1 + 2\cos^2\beta)\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} - \\
& 4\alpha^3\cos\beta \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \alpha^4 \rho \omega^2 W = 0
\end{aligned} \tag{4-57}$$



齐次解

设方程 (4-57) 齐次解如下

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (4-58)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

设

$$f_m(\eta) = G e^{im\pi\eta r} \quad (4-59)$$

式中:  $m$  为非 0 的整数。  $G$  为待定复数常数。  $r$  为特征根。

将式 (4-58) 和式 (4-59) 代入方程 (4-57) 可得四次特征根方程

$$1 - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{D(m\pi)^4} - 4\alpha r \cos\beta + 2(1 + 2\cos^2\beta)\alpha^2 r^2 - 4\alpha^3 r^3 \cos\beta + \alpha^4 r^4 = 0 \quad (4-60)$$

引入下面变换:

$$\alpha r = z + \cos\beta \quad (4-61)$$

方程 (4-61) 改写如下

$$\sin^4\beta - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{D(m\pi)^4} + 2z^2 \sin^2\beta + z^4 = 0 \quad (4-62)$$

$$z^2 = -\sin^2\beta \pm \sqrt{\frac{a^4 \omega^2 \rho}{D(m\pi)^4}} \quad (4-63)$$

方程 (4-62) 可以解出 4 个特征根。方程 (4-62) 根可以标记为  $r_k, r_{k+1} (k=1, 3)$ 。随着  $m$  和  $\omega$  组合的变化, 方程 (4-62) 特征根可能是 4 个共轭复数 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1, r_3 = a_3 + ib_3, r_4 = a_3 - ib_3$ ) 或者 2 个实数根 ( $r_3 = a_3, r_4 = a_4$ ), 2 个复数根 ( $r_1 = a_1 + ib_1, r_2 = a_1 - ib_1$ )。

$$r_{1,2} = a_1 \pm ib_1 \quad (4-64)$$

式中:

$$a_1 = \frac{\cos\beta}{\alpha}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{\sin^2\beta + \frac{a^2}{(m\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega^2\rho}{D}}}}{\alpha}$$

$$r_{3,4} = \begin{cases} a_{3,4} = \frac{\cos\beta \pm b_0}{\alpha}, & m < T \\ a_3 \pm ib_3 = \frac{\cos\beta \pm ib_0}{\alpha}, & m > T \end{cases} \quad (4-65)$$

$$b_0 = \sqrt{\left| -\sin^2\beta + \sqrt{\frac{a^4\omega^2\rho}{D(m\pi)^4}} \right|}$$

$$T = \frac{a}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{D}} \sqrt{\frac{\omega}{\sin^2\beta}}}$$

采取类似步骤,可得挠度函数一组齐次解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} G_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} +$$

$$\sum_{m>T}^{\infty} G_{3m} \frac{\sinh m \pi b_3 \eta \sin m \pi (a_3 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_3} +$$

$$\sum_{m>T}^{\infty} G_{4m} \frac{\sinh m \pi b_3 (1 - \eta) \sin m \pi (a_3 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_3} +$$

$$\sum_{m<T}^{\infty} G_{3m} (\sin m \pi (a_3 (1 - \eta) + 1 - \xi) +$$

$$\sin m \pi (a_4 (1 - \eta) + 1 - \xi) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m < T} G_{4m} (\sin m \pi (a_3 \eta + \xi) + \sin m \pi (a_4 \eta + \xi)) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} G_{5m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} G_{6m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\
& \sum_{m < T} G_{7m} (\sin m \pi (a_3 (1 - \eta) + 1 - \xi) - \\
& \sin m \pi (a_4 (1 - \eta) + 1 - \xi)) + \\
& \sum_{m > T} G_{8m} (\sin m \pi (a_3 \eta + \xi) - \sin m \pi (a_4 \eta + \xi)) \quad (4-66)
\end{aligned}$$

考虑一般情况, 设

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi s \xi} e^{i n \pi \eta} \quad (4-67)$$

式中:  $s$  为特征根,  $n \neq 0$ 。

采取相似步骤, 可得另一个特征方程 (4-68)

$$\begin{aligned}
1 - \frac{a^4 \omega^2 \rho}{D(m\pi)^4} - 4(\cos \beta) \left( \frac{s}{\alpha} \right) + 2(1 + 2\cos^2 \beta) \left( \frac{s}{\alpha} \right)^2 - \\
4(\cos \beta) \left( \frac{s}{\alpha} \right)^3 + \left( \frac{s}{\alpha} \right)^4 = 0 \quad (4-68)
\end{aligned}$$

特征方程 (4-68) 特征根可以标注为  $s_k, s_{k+1} (k=1, 3)$ :

$$s_{1,2} = c_1 \pm i d_1 \quad (4-69)$$

$$\text{式中: } c_1 = \alpha \cos \beta, d_1 = \alpha \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{a^2}{(m\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{D}}}$$

$$s_{3,4} = \begin{cases} c_{3,4} = \alpha(\cos \beta \pm d_0), & m < T \\ c_3 \pm i d_3 = \alpha(\cos \beta \pm i d_0), & m > T \end{cases}$$

$$d_0 = \sqrt{-\sin^2 \beta + \sqrt{\frac{a^4 \omega^2 \rho}{D(m\pi)^4}}}$$

$$T = \frac{a}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{D}} \sqrt{\frac{\omega}{\sin \beta}}}$$

采取相似步骤, 可得挠度  $W$  的另一组齐次解:

$$\begin{aligned} W^* = & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\ & \sum_{n > T}^{\infty} Q_{3n} \frac{\sinh n \pi d_3 \xi \sin n \pi (c_3 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\ & \sum_{n > T}^{\infty} Q_{4n} \frac{\sinh n \pi d_3 (1 - \xi) \sin n \pi (c_3 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\ & \sum_{n < T}^{\infty} Q_{3n} (\sin n \pi (c_3 (1 - \xi) + 1 - \eta) + \\ & \sin n \pi (c_4 (1 - \xi) + 1 - \eta) + \\ & \sum_{n > T}^{\infty} Q_{4n} (\sin n \pi (c_3 \xi + \eta) + \sin n \pi (c_4 \xi + \eta)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{5n} \frac{\sinh n \pi d_3 \xi \cos n \pi (c_3 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{6n} \frac{\sinh n \pi d_3 (1 - \xi) \cos n \pi (c_3 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\ & \sum_{n > T}^{\infty} Q_{7n} \eta \frac{\sinh n \pi d_3 \xi \cos n \pi (c_3 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\ & \sum_{n > T}^{\infty} Q_{8n} \eta \frac{\sinh n \pi d_3 (1 - \xi) \cos n \pi (c_3 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_3} \end{aligned}$$

(4-70)

### 补充解

对于式(4-58),当  $m=0$ , 补充解可从方程(4-71) 求解。

$$D\alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - a^4 \rho \omega^2 W = 0 \quad (4-71)$$

方程(4-71) 有4个根:

$$\pm a_0, \pm ia_0$$

式中:  $a_0 = a \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{D}} \sqrt{\omega}}$ 。

方程(4-65) 的解如下:

$$W^* = t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh a_0} + t_3 \sin a_0 \eta + t_4 \sin a_0 (1 - \eta) \quad (4-72)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数。

对于式(4-67),当  $n=0$ , 补充解可从方程(4-73) 求解。

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a^4 \omega^2 \rho W = 0 \quad (4-73)$$

方程(4-73) 有4个根:

$$\pm c_0, \pm ic_0$$

式中:  $c_0 = a \sqrt{\sqrt{\frac{\rho}{D}} \sqrt{\omega}}$ 。

方程(4-73) 的解为:

$$W^* = t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c_0} + t_6 \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh c_0} + t_7 \sin c_0 \xi + t_8 \sin c_0 (1 - \xi) \quad (4-74)$$

考虑到斜形板有12个角点条件,引入如下一组补充解:

$$W^{**} = t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) +$$

$$\begin{aligned}
& t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
& t_{11} \left( \xi + A_{mn11} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\
& t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \quad (4-75)
\end{aligned}$$

式中:  $m, n$  为整数。

将式(4-75)代入方程(4-57) 可得:

$$\begin{aligned}
& t_9 \left( (D(m\pi)^4 + 2(D + 2D\cos^2\beta)\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \right. \\
& D(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (+4\alpha^3\cos\beta m \pi(n\pi)^3 + \\
& 4(\cos\beta)(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta) A_{mn9} + \\
& B_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) + t_{10} \left( (D(m\pi)^4 + \right. \\
& 2(D + 2D\cos^2\beta)\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& D(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (+4(\alpha^3\cos\beta) m \pi(n\pi)^3 - \\
& 4(\cos\beta)(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta) A_{mn10} + \\
& B_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) + t_{11} \left( (D(m\pi)^4 + \right. \\
& 2(D + 2D\cos^2\beta)\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& D(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + (+4\alpha^3\cos\beta m \pi(n\pi)^3 + \\
& 4(\cos\beta)(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta) A_{mn11} + \\
& B_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) + t_{12} \left( (D(m\pi)^4 + \right. \\
& 2(D + 2D\cos^2\beta)\alpha^2(m\pi)^2(n\pi)^2 + \\
& D(n\pi)^4\alpha^4 - a^4\rho\omega^2) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta + \\
& (+4\alpha^3\cos\beta m \pi(n\pi)^3 + \\
& 4(\cos\beta)(m\pi)^3(n\pi)\alpha) \cos m \pi \xi \cos n \pi \eta) A_{mn12} + \\
& B_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta) = 0 \quad (4-76)
\end{aligned}$$

$$\cos m \pi \xi \cos n \pi \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mnl} \sin k \pi \xi \sin l \pi \eta \quad (4-77)$$

$$C_{mnl} = \begin{cases} \frac{16mn}{\pi^2(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)}, & \text{仅当 } m \pm k \text{ 和 } n \pm l \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (4-78)$$

$$B_{mn9} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \eta \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (4-79)$$

$$B_{mn10} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \eta \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (4-80)$$

$$B_{mn11} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \xi \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (4-81)$$

$$B_{mn12} = \frac{4}{mn} \int_0^1 \int_0^1 \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta d\xi d\eta \quad (4-82)$$

$A_{mn9}, A_{mn10}, A_{mn11}, A_{mn12}$ 可由方程(4-76)求出。 $l, k$ 为整数。

这样全补充解可以合写如下:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 \frac{\sinh \eta a_0}{\sinh a_0} + t_2 \frac{\sinh a_0(1-\eta)}{\sinh a_0} + t_3 \sin a_0 \eta + t_4 \sin a_0(1-\eta) + \\ & t_5 \frac{\sinh \xi c_0}{\sinh c} + t_6 \frac{\sinh c_0(1-\xi)}{\sinh c_0} + t_7 \sin c_0 \xi + t_8 \sin c_0(1-\xi) + \\ & t_9 \left( \xi \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn9} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & + t_{10} \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn10} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{11} \left( \xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn11} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) + \\ & t_{12} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn12} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \right) \end{aligned} \quad (4-83)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定常数。

## 各向同性斜板振动一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi$ 、 $\eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{m=1}^{\infty} G_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} G_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \\
 & \sum_{m>T}^{\infty} G_{3m} \frac{\sinh m \pi b_3 \eta \sin m \pi (a_3 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_3} + \\
 & \sum_{m>T}^{\infty} G_{4m} \frac{\sinh m \pi b_3 (1 - \eta) \sin m \pi (a_3 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_3} + \\
 & \sum_{m<T}^{\infty} G_{3m} (\sin m \pi (a_3 (1 - \eta) + 1 - \xi) + \\
 & \sin m \pi (a_4 (1 - \eta) + 1 - \xi)) + \\
 & \sum_{m<T}^{\infty} G_{4m} (\sin m \pi (a_3 \eta + \xi) + \sin m \pi (a_4 \eta + \xi)) + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
 & \sum_{n>T}^{\infty} Q_{3n} \frac{\sinh n \pi d_3 \xi \sin n \pi (c_3 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\
 & \sum_{n>T}^{\infty} Q_{4n} \frac{\sinh n \pi d_3 (1 - \xi) \sin n \pi (c_3 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_3} + \\
 & \sum_{n<T}^{\infty} Q_{3n} (\sin n \pi (c_3 (1 - \xi) + 1 - \eta) +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin n \pi (c_4 (1 - \xi) + 1 - \eta)) + \sum_{n > T}^{\infty} Q_{4n} (\sin n \pi (c_3 \xi + \eta) + \\ & \sin n \pi (c_4 \xi + \eta)) + W^{**} \end{aligned} \quad (4-84)$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  为待定实数常数。

实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (4-84) 共有  $12M+12$  个未知数  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2), t_j (j=1, 2, \dots, 12)$ 。对于矩形板振动问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $8M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $8M+12$  个线性方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\}$$

式中:  $K$  为  $(8M+12) \times (8M+12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, t_1, t_2, \dots, t_{12}\}$$

当  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  不同时为 0, 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  即为所求频率。

## 第 5 章 圆柱型各向异性经典 圆形板弯曲问题一般解析解

圆板弯曲问题在工程实际中有广泛的应用,长期以来国内外力学界做了大量的研究工作,各向同性圆板弯曲问题的个别解曾由 Resissner, H. Schmidt 等人讨论过,林鸿逊和叶开沅分别采用不同方法建立了几种情况的边值问题的一般解。对各向异性圆板则存在数学求解的困难。应用第 3 章引入的新复级数方法,在引入  $r = e^t$  的基础上,可以建立圆柱型各向异性圆板弯曲的一般解析解。

### 5.1 解析求解

考虑圆柱型各向异性圆形板,在极坐标  $r - \theta$  下(图 5-1),圆板弯曲问题的控制方程如下:

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + 4D_{16} \frac{1}{r} \frac{\partial^4 W}{\partial r^3 \partial \theta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 W}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \\
 & 4D_{26} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^3 \partial r} + D_{22} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + 2D_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^2 \partial r} - \\
 & 4D_{26} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} - D_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + 4(D_{16} + D_{26}) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} + \\
 & 2(D_{12} + D_{22} + 2D_{66}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + D_{22} \frac{1}{r^3} \frac{\partial W}{\partial r} - \\
 & 4(D_{16} + D_{26}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{q}{h}
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

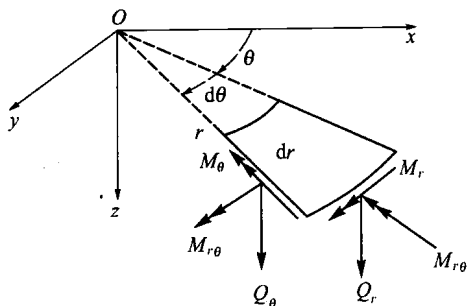


图 5-1 极坐标圆板弯曲示意图

### 5.1.1 坐标变量变换

引入变量变换

$$r = e^t \quad (5-2)$$

引入式(5-2),将圆板区域变换在  $t-\theta$  坐标下,这样式(5-1)可以变换为下式:

$$\begin{aligned} & S_{40} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + S_{31} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^3 \partial t} + S_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial t^2 \partial \theta^2} + S_{13} \frac{\partial^4 W}{\partial t^3 \partial \theta} + S_{04} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + S_{30} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} + \\ & S_{21} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^2 \partial t} + S_{12} \frac{\partial^3 W}{\partial t^2 \partial \theta} + S_{03} \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + S_{20} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + S_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial t} + S_{02} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \\ & S_{10} \frac{\partial W}{\partial t} + S_{01} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{q}{h} \end{aligned} \quad (5-3)$$

式中:

$$S_{40} = D_{22}, S_{31} = 4D_{26}, S_{22} = 2(D_{12} + 2D_{66})$$

$$S_{13} = 4D_{16}, S_{04} = D_{11}, S_{30} = -4D_{26}$$

$$S_{21} = -4D_{12} - 8D_{66}, S_{12} = -12D_{16}$$

$$S_{03} = -4D_{11}, S_{20} = 2D_{12} + 2D_{22} + 4D_{66}$$

$$S_{11} = 12D_{16} + 4D_{26}, S_{02} = -D_{22} + 5D_{11}$$

$$S_{10} = -4D_{16} - 4D_{26}, S_{01} = 2D_{22} - 2D_{11}$$

## 5.1.2 求解过程

### 1. 齐次求解

设方程(5-1)奇次方程有如下解:

$$W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(t) e^{im\theta} \quad (5-4)$$

式中:  $i^2 = -1$ ;

$m$ ——整数。

在  $m=0$  时,根据常微分方程理论可得出补充解

$$W^{**} = C + Dr^2 + Er^{1+k} + Fr^{1-k} \quad (5-5)$$

式中:  $k^2 = \frac{D_{22}}{D_{11}}$

在  $m \neq 0$  时,设

$$f_m(r) = Ae^{is} \quad (5-6)$$

式中:  $A$ ——复数;

$s$ ——特征根。

将式(5-4)和式(5-6)代入方程式(5-3)奇次方程中,得特征方程式(5-7)

$$\begin{cases} S_{40}m^4 - iS_{30}m^3 - S_{20}m^2 + iS_{10}m + \\ s(S_{31}m^3 - iS_{21}m^2 - S_{11}m + iS_{01}) + \\ s^2(S_{22}m^2 - iS_{12}m - S_{02}) + \\ s^3(S_{13}m - iS_{03}) + S_{04}s^4 = 0 \end{cases} \quad (5-7)$$

求解上式  $t$ , 可求出 4 个特征根

$$a_{km} + ib_{km}, k = 1, 3, 5, 7 \quad (5-8)$$

其中  $a_{km}, b_{km}$  是常数。这样  $W$  可以用极坐标  $r-\theta$  推出来,考虑线性偏微分方程的线性叠加原理,可以得到圆柱型各向异性圆板弯曲问题的一

般解析解。

$$W = C + Dr^2 + Er^{1+K} + Fr^{1-K} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} (A_{km} r^{-b_{km}} \cos(m\theta + a_{km} \ln r) + A_{k+1,m} r^{-b_{km}} \sin(m\theta + a_{km} \ln r)) + W_0 \quad (5-9)$$

其中  $A_{km} (j=1,3,5,7)$ ,  $C, D, E, F$  待定常数;  $W_0$  是针对给定载荷的特解。对于有些  $m$ , 可能会出现一对重虚数根  $-i, -i$ , 这时对应的部分解为

$$W_m = A_{5m} r \cos m\theta + A_{6m} r \sin m\theta + A_{7m} r \ln r \cos m\theta + A_{8m} r \ln r \sin m\theta$$

值得指出的是, 补充解式(5-5)是正交异性圆板的轴对称解。

求解各向同性圆板的特征方程式(5-7), 可得到如下特征根:

$$0, 0, 2i, 2i; \quad m = 0$$

$$i, -i, i, 3i; \quad m = 1$$

$$mi, -mi, (-m+2)i, (m+2)i; \quad m \geq 2$$

这样可以推出各向同性圆板的一般解

$$W = C + Dr^2 + E \ln r + Fr^2 \ln r + A_{11} r \cos \theta + A_{21} r \sin \theta +$$

$$A_{31} r^3 \cos \theta + A_{41} r^3 \sin \theta + A_{51} \frac{1}{r} \cos \theta + A_{61} \frac{1}{r} \sin \theta +$$

$$A_{71} r \ln r \cos \theta + A_{81} r \ln r \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (A_{1m} r^m \cos m\theta +$$

$$A_{2m} r^{-m} \cos m\theta + A_{3m} r^m \sin m\theta + A_{4m} r^{-m} \sin m\theta +$$

$$A_{5m} r^{-m+2} \cos m\theta + A_{6m} r^{m+2} \cos m\theta + A_{7m} r^{-m+2} \sin m\theta +$$

$$A_{8m} r^{m+2} \sin m\theta) + W_0$$

$$(5-10)$$

这样用本书方法求得的各向同性解与已有各向同性圆板的一般解一致。

对于圆柱型各向异性圆板,当圆板极点与圆板几何中心一致时,就成为特殊正交各向异性圆板,  $D_{16} = D_{26} = 0$ 。这时特征根为

$$ib_{11}, i(-b_{11} - 2), -i, -i, m = 1 \quad (5-11)$$

$$\begin{aligned} b_{1m}i, (-b_{1m} - 2)i \\ b_{2m}i, (-b_{2m} - 2)i \end{aligned}, m \geq 2 \quad (5-12)$$

据此,可以得到正交异性圆板弯曲问题得一般解析解

$$\begin{aligned} W = & C + Dr^2 + Er^{1+k} + Fr^{1-k} + \\ & A_{11}r^{-b_{11}}\cos\theta + A_{21}r^{-b_{11}}\sin\theta + A_{31}r^{2+b_{11}}\cos\theta + A_{41}r^{2+b_{11}}\sin\theta + \\ & A_{51}r\cos\theta + A_{61}r\sin\theta + A_{71}r\ln r\cos\theta + A_{81}r\ln r\sin\theta + \\ & \sum_{m=2}^{\infty} (A_{1m}r^{-b_{1m}}\cos(m\theta) + A_{2m}r^{-b_{1m}}\sin(m\theta) + \\ & A_{3m}r^{2+b_{1m}}\cos(m\theta) + A_{4m}r^{2+b_{1m}}\sin(m\theta) + \\ & A_{5m}r^{-b_{2m}}\cos(m\theta) + A_{6m}r^{-b_{2m}}\sin(m\theta) + \\ & A_{7m}r^{2+b_{2m}}\cos(m\theta) + A_{8m}r^{2+b_{2m}}\sin(m\theta)) + W_0 \end{aligned} \quad (5-13)$$

其中  $A_{jm} (j=1,2,\dots,8), C, D, E, F$  待定常数;  $W_0$  是针对给定载荷的特解。对于正交各向异性圆板,  $b_{11}, b_{1m}, b_{2m} (m \geq 2)$  均不为 1。

## 2. 特解

式(5-3)的特解相对容易求出。作为一个例子,圆板承受横向载荷  $q = qrcos\theta$ , 特解  $W_0$  如下:

$$W_0 = r(G\cos\theta + H\sin\theta) \quad (5-14)$$

将式(5-10)代入式(5-2),  $f$  就可确定  $G, H$ 。

## 3. 边界条件

在  $r-\theta$  坐标下的经典圆板有三类典型边界条件:简支边界 S, 固支边界 C, 自由边界条件 F。

$$\begin{cases} \text{S: } w = M_r = 0 \\ \text{C: } w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \text{F: } Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta} = M_r = 0 \end{cases} \quad (5-15)$$

对于圆板有周边周期性条件:  $w(r, \theta) = w(r, \theta + 2k\pi)$

对于实心圆板,板中心内力、内力矩、剪力  $M_r, M_\theta, M_{r\theta}, Q_r, Q_\theta$  为有限值。

#### 4. 求解

在实际计算中,  $m$  不可能取无穷大, 设  $m$  最多取到  $M$ 。这样一般解可以有  $8M+4$  个未知数, 对于环形板每边有 2 个边界条件, 即挠度或等效剪力、或斜度或弯矩分别等于边界的已知值。在每个边界条件所建立的方程中将非傅里叶级数的部分展开成为傅里叶级数, 根据级数的正交性可得到  $8M+4$  方程可求得  $8M+4$  未知数。

对于实心板, 为了保证中心处挠度、斜度、内力为有限值, 可以得到  $A_{2m} = A_{4m} = B = 0$  共  $4M+2$  常数为 0, 再根据外圆板边界的 2 个边界条件建立  $4M+2$  方程, 可以求解  $4M+2$  个未知数, 这样各向异性圆(环)板弯曲问题得解。

## 5.2 圆板弯曲算例讨论

考虑松木实心圆板承受反对称横向载荷  $p = qrcos\theta$  弯曲问题, 板平面垂直于树干, 极点为圆板的中心, 这样的松木圆板为圆柱形正交异性圆板。松木材料力学特性为

$$E_r = 1.103\text{GPa} \quad E_\theta = 0.573\text{GPa}$$

$$G_{\theta r} = 0.066\text{GPa} \quad \nu_{r\theta} = 0.68$$

松木圆板半径  $R$  为 1m, 厚度  $h$  为 0.01m, 分布载荷为  $qrcos\theta$  ( $q = 10000\text{N/m}^2$ )。  $m=1$  时的特征根为:  $-3.3565i, 1.33565i, -i, -i$ 。

针对边界简支和固支两种情况进行计算。简支实心圆板弯曲计算结果体现在表 5-1 ~ 表 5-8。

表 5-1 简支实心圆板分布的无量纲挠度  $10^2 \frac{w E_\theta h}{q R^4}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	1.7430	1.2330	0.0000	-1.2330	-1.7430	-1.2330	0.0000	1.2330	1.7430
0.50	2.3880	1.6880	0.0000	-1.6880	-2.3880	-1.6880	0.0000	1.6880	2.3880
0.75	1.6770	1.1860	0.0000	-1.1860	-1.6770	-1.1860	0.0000	1.1860	1.6770
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5-2 简支实心圆板无量纲径向弯矩  $\frac{M_r}{q R^2}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	-0.0443	-0.0313	0.000	0.0313	0.0443	0.0313	0.0000	-0.0313	-0.0443
0.50	-0.0549	-0.0388	0.0000	0.0388	0.0549	0.0388	0.0000	-0.0388	-0.0549
0.75	-0.0425	-0.0300	0.0000	0.0300	0.0425	0.0300	0.000	-0.0300	-0.0425
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5-3 简支实心圆板无量纲环向弯矩  $\frac{M_\theta}{q R^2}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	-0.0218	-0.0154	0.0000	0.0154	0.0218	0.0154	0.0000	-0.0154	-0.0218
0.50	-0.0276	-0.0195	0.0000	0.0195	0.0276	0.0192	0.000	-0.0195	-0.0276
0.75	-0.0234	-0.0165	0.0000	0.0165	0.0234	0.0165	0.0000	-0.0165	-0.0234
1.00	-0.0061	-0.0043	0.0000	0.0043	0.0061	0.0043	0.0000	-0.0043	-0.0061



表 5-4 简支实心圆板无量纲扭矩  $\frac{M_{r\theta}}{qR^2}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0000	0.0010	0.0014	0.0010	0.0000	-0.0010	-0.0014	-0.0010	0.0000
0.50	0.0000	0.0012	0.0017	0.0012	0.0000	-0.0012	-0.0017	-0.0012	0.0000
0.75	0.0000	0.0009	0.0012	0.0009	0.0000	-0.0009	-0.0012	-0.0009	0.0000
1.00	0.0000	-0.0002	-0.0003	-0.0002	0.0000	0.0002	0.0003	0.0002	0.0000

再考虑固支的实心松木圆板承受反对称横向载荷  $p = qr\cos\theta$  的横向弯曲问题。下面给出挠度和弯矩、扭矩的变化规律。

表 5-5 固支实心圆板分布的无量纲挠度  $10^2 \frac{wE_\theta h}{qR^4}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.6979	0.4935	0.0000	-0.4935	-0.6979	-0.4935	0.0000	0.4935	0.6979
0.50	0.8287	0.5860	0.0000	-0.5860	-0.8287	-0.5860	0.0000	0.5860	0.8287
0.75	0.3995	0.2825	0.0000	-0.2825	-0.3995	-0.2825	0.0000	0.2825	0.3995
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5-6 固支实心圆板无量纲径向弯矩  $\frac{M_r}{qR^2}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	-0.0233	-0.0165	0.0000	0.0165	0.0233	0.0165	0.0000	-0.0165	-0.0233
0.50	-0.0241	-0.0171	0.0000	0.0171	0.0241	0.0171	0.0000	-0.0171	-0.0241
0.75	-0.0041	-0.0029	0.0000	0.0029	0.0041	0.0029	0.0000	-0.0029	-0.0041
1.00	0.0450	0.0318	0.0000	-0.0318	-0.0450	-0.0318	0.0000	0.0318	0.0450

表 5-7 固支实心圆板无量纲环向弯矩  $\frac{M_\theta}{qR^2}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	-0.0115	-0.0081	0.0000	0.0081	0.0115	0.0081	0.0000	-0.0081	-0.0115
0.50	-0.0126	-0.0089	0.0000	0.0089	0.0126	0.0089	0.0000	-0.0089	-0.0126
0.75	-0.0046	-0.0032	0.0000	0.0032	0.0046	0.0032	0.0000	-0.0032	-0.0046
1.00	0.0159	0.0113	0.0000	-0.0113	-0.0159	-0.0113	0.0000	0.0113	0.0159

表 5-8 固支实心圆板无量纲扭矩  $\frac{M_{r\theta}}{qR^2}$  分布

$\theta \backslash r$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0000	0.0005	0.0007	0.0005	0.0000	-0.0005	-0.0007	-0.0005	0.0000
0.50	0.0000	0.0005	0.0007	0.0005	0.0000	-0.0005	-0.0007	-0.0005	0.0000
0.75	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.00	0.0000	-0.0012	-0.0017	-0.0012	0.0000	0.0012	0.0017	0.0012	0.0000

对以上数值分析结果,可以得到看出:相对固支边界约束,简支边界条件增大了挠度变形,对于本文涉及的载荷和板结构,简支圆板的挠度为固支板的 2 倍~3 倍。固支板最大弯矩发生在固支边界,简支板最大弯矩发生在圆板中间环(0.5,  $\theta$ ),固支板最大弯矩稍大于简支板最大弯矩。简支板、固支板最大扭矩均发生在板边界上,固支板的最大扭矩要略大于简支板最大扭矩。

综合引入复数级数和坐标变换的方法,可以求解圆形域的边值问题,不仅可用于处理圆板弯曲问题,对于圆形域的热传导、渗流、静电磁场问题也均可处理,应该说这是处理圆形域问题的一种基本方法。

## 第6章 考虑一阶剪切变形的对称角 铺设复合材料矩形板静力问题解析

各向异性、剪切变形是复合材料结构主要的力学特性。但由于数学处理的困难,不考虑剪切变形的经典各向异性薄板横向弯曲解析求解直到近年才实现。而考虑剪切变形理论的各向异性板横向弯曲解析求解则一直无法进行。目前一般只能用 Levy 法求解考虑剪切变形情况下一对边简支的正交异性矩形板横向弯曲问题,纳维叶法求解四边简支正交异性矩形板弯曲。目前在工程结构中复合材料已开始作为主承力件使用,结构厚度呈现出逐渐增大的趋势,同时随着生产工艺水平的发展提高,纤维性能也不断提高,基体薄弱更将显得突出起来。在一定范围内,横向剪切变形已不可忽略,解析研究横向剪切效应对各向异性板结构力学特性就显得更为重要、更为迫切起来。应用本书介绍的复级数方法建立了基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料矩形板(以下简称中厚型对称角铺设层合板)力学问题一般解析解。算例验证了所得到弯曲一般解析解的收敛性、稳定性。本章给出数值计算结果,分析研究复合材料层合板各设计参数对复合材料板力学特性的影响。

### 6.1 弯曲问题的位移型方程

假设中厚型对称角铺设层合板在变形分析时的位移分量为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\Phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = z\Phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) \approx w(x, y) \end{cases} \quad (6-1)$$

式中:  $\Phi_x$  和  $\Phi_y$  分别为板中面法线沿  $y$  和  $x$  方向的转动分量。

物理关系

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6-2)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

式中:  $D_{ij} (i=1,2; j=1,2,6)$  为弯曲刚度系数。  $A_{55}, A_{45}, A_{44}$  为修正剪切刚度系数,有

$$\begin{cases} A_{44} = A / (AB - C^2) \\ A_{45} = B / (AB - C^2) \\ A_{55} = C / (AB - C^2) \\ A = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N [Q_{44}^{(k)} / (\Delta Q)^2 H_k] \\ B = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N [Q_{55}^{(k)} / (\Delta Q)^2 H_k] \\ C = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N [Q_{45}^{(k)} / (\Delta Q)^2 H_k] \\ (\Delta Q)^2 = Q_{44}^{(k)} Q_{55}^{(k)} - (Q_{45}^{(k)})^2 \\ H_k = h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{h_k^5 - h_{k-1}^5}{h^4} \end{cases} \quad (6-4)$$

引入以下无量纲量:

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{a} \\ \eta = \frac{y}{b} \\ W = \frac{w}{h} \\ P = qha^2 \end{cases} \quad (6-5)$$

平衡方程可写如下形式:

$$\begin{cases} L_{11}\Phi_x + L_{12}\Phi_y + L_{13}W = 0 \\ L_{12}\Phi_x + L_{22}\Phi_y + L_{23}W = 0 \\ L_{13}\Phi_x + L_{23}\Phi_y + L_{33}W = P \end{cases} \quad (6-6)$$

式中:

$$\begin{cases} L_{11} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{55}a^2 \\ L_{12} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (D_{12} + D_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{45}a^2 \\ L_{22} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{44}a^2 \\ L_{13} = - \left( A_{55} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{45}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) ah \\ L_{23} = - \left( A_{45} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{44}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) ah \\ L_{33} = - \left( A_{55} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{45}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{44}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) h^2 \\ \alpha = \frac{a}{b} \end{cases}$$

(6-7)

中厚型对称角铺设层合板横向弯曲问题求解在数学上可归结为

求解偏微分方程组(6-6)在横向弯曲矩形板边界条件下边值问题。

## 6.2 弯曲一般解析解的建立

本书采用位移法求解中厚型对称角铺设层合板问题。

### 1. 通解的推导

本书采用位移法求解,设

$$\begin{cases} \Phi_x = \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{im\pi\xi} e^{im\pi\eta r} \\ \Phi_y = \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{im\pi\xi} e^{im\pi\eta r} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} G e^{im\pi\xi} e^{im\pi\eta r} \end{cases} \quad (6-8)$$

式中:  $i$ ——虚数单位;

$m$ ——整数;

$r$ ——特征根。

将式(6-8)代入式(6-6),当  $m$  不为 0 时,可推得有关  $r$  的六次特征代数方程

$$S_{60} + S_{51}\alpha r + S_{42}\alpha^2 r^2 + S_{33}\alpha^3 r^3 + S_{24}\alpha^4 r^4 + S_{15}\alpha^5 r^5 + S_{06}\alpha^6 r^6 = 0 \quad (6-9)$$

上式中  $S_{kl}$  具体形式复杂,本章略。

对于各向异性材料矩形板,式(6-9)有三对共轭复根  $a_k \pm b_k i$  ( $k=1,2,3$ )

可以推得的实数形式级数通解  $\Phi_x$ 、 $\Phi_y$ 、 $W$  合写如下:

$$\begin{aligned} (\Phi_x, \Phi_y, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \frac{\sinh(m\pi\phi_k\eta) \sin(m\pi(a_k(1-\eta) + 1-\xi))}{\sinh m\pi\phi_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \frac{\sinh(m\pi\phi_k(1-\eta)) \sin(m\pi(a_k\eta + \xi))}{\sinh(m\pi\phi_k)} + \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \frac{\sinh(m\tau\phi_k\eta) \cos(m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi))}{\sinh(m\tau\phi_k)} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \frac{\sinh(m\tau\phi_k(1-\eta)) \cos(m\pi(a_k\eta + \xi))}{\sinh(m\tau\phi_k)} \quad (6-10)$$

从基本解  $\sinh(f) \sin(f)$ 、 $\sinh(f) \cos(f)$ 、 $\cosh(f) \sin(f)$  和  $\cosh(f) \cos(f)$  (其中  $f$  为任意函数) 的独立性出发, 可得到  $E_{ijm}, F_{ijm}, G_{ijm}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 之间的关系式。将  $\Phi_x, \Phi_y, W$  代入式(6-2)中任意两式, 可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{Bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{Bmatrix} \quad (6-11)$$

当  $m$  为 0 时, 设

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \Phi_{xy} e^{\tau\eta} \\ \Phi_y &= \Phi_{yy} e^{\tau\eta} \\ W_x &= W_y e^{\tau\eta} \end{aligned} \quad (6-12)$$

将式(6-12)代入式(6-6), 可得控制方程及特征根:  $\pm a_0$

本书又设

$$\begin{cases} \Phi_x = \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{in\tau\xi} e^{in\tau\eta} \\ \Phi_y = \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{in\tau\xi} e^{in\tau\eta} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{in\tau\xi} e^{in\tau\eta} \end{cases} \quad (6-13)$$

与上面类似,可得有关  $s$  的特征方程、三对不等共轭虚根  $c_k \pm d_k i$  ( $k=1,2,3$ ) 和关系矩阵如下:

$$T_{60}s^6 + T_{51}s^5 + T_{42}s^4 + T_{33}s^3 + T_{24}s^2 + T_{15}s + T_{06} = 0 \quad (6-14)$$

$$\begin{Bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{Bmatrix} \quad (6-15)$$

同样可得对应的实数形式级数通解  $\Phi_x^*$ 、 $\Phi_y^*$ 、 $W^*$  合写如下:

$$\begin{aligned} (\Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin(n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin(n\pi(c_k \xi + \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos(n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos(n\pi(c_k \xi + \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} \end{aligned} \quad (6-16)$$

从线性偏微分方程解得可选加性出发,在式(6-5)、式(6-16)基础上补充两个坐标方向的梁函数、多项式及特解,可得一般解析解:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin(n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin(n\pi(c_k \xi + \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_5(\eta - 0.5)^2 + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + t_7(\xi - 0.5)^3 + \\
& t_8(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) + t_9(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_{10}(\eta - 0.5)^3 + \\
& W_{y1} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0)} + W_{y2} \frac{\sinh(1-\eta)a_0}{\sinh(a_0)} + W_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0)} + \\
& W_{x2} \frac{\sinh(1-\xi)c_0}{\sinh(c_0)} + W^{**} \tag{6-17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& T_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& T_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& T_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& T_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) +
\end{aligned}$$

$$t_{11} + t_{12}(\xi - 0.5) + t_{13}(\eta - 0.5) + t_{14}(\xi - 0.5)^2 +$$

$$t_{15}(\eta - 0.5)^2 + t_{16}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) +$$

$$\Phi_{xy1} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{xy2} \frac{\sinh(1-\eta)a_0}{\sinh(a_0)} + \Phi_{xx1} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0)} +$$

$$\Phi_{xx2} \frac{\sinh(1-\xi)c_0}{\sinh(c_0)} + \Phi_x^{**} \quad (6-18)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh m\pi b_k} + \right. \\
& R_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \left. \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. R_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos m\pi(a_k\eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. R_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k\eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh m\pi b_k} + \right. \\
& \left. R_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos m\pi(a_k\eta + \xi)}{\sinh m\pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& \left. S_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& \left. S_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& \left. S_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \Big) + \\
& t_{17} + t_{18}(\xi - 0.5) + t_{19}(\eta - 0.5) + t_{20}(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{21}(\eta - 0.5)^2 + t_{22}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\
& \Phi_{\gamma\gamma 1} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma\gamma 2} \frac{\sinh(1-\eta)a_0}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma\gamma 1} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0)} + \\
& \Phi_{\gamma\gamma 2} \frac{\sinh(1-\xi)c_0}{\sinh(c_0)} + \Phi_{\gamma}^{**} \quad (6-19)
\end{aligned}$$

式中:  $W^{**}$ 、 $\Phi_x^{**}$ 、 $\Phi_y^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于横向弯曲问题,本书引入势函数  $\Phi$ ,引进微分算子  $D_0$ ,它是以算子  $L_{ij}$  组成得  $3 \times 3$  行列式,并令  $D_{kl}(k, l=1, 2, 3)$  表示给该行列式的代数余子式。使

$$\begin{cases} \Phi_x = D_{31}\Phi \\ \Phi_y = D_{32}\Phi \\ W = D_{33}\Phi \end{cases} \quad (6-20)$$

依照线性代数理论,基本微分方程可以写成

$$D_0\Phi = P \quad (6-21)$$

展开为

$$\begin{aligned}
& SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\
& SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\
& SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = P \quad (6-22)
\end{aligned}$$

式中:  $SS_{40}, SS_{31}, SS_{22}, SS_{13}, SS_{04}, SS_{60}, SS_{51}, SS_{42}, SS_{33}, SS_{24}, SS_{15}, SS_{06}$  展开式复杂,具体形式略。

对于均布载荷,本书选取

$$\Phi = \frac{P}{52} \left( \frac{(\xi - 0.5)^4}{SS_{40}} + \frac{(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^2}{SS_{22}} + \frac{(\eta - 0.5)^4}{SS_{04}} \right) \quad (6-23)$$

结合式(6-20)可以推出三个特解  $\Phi_x^{**}$ 、 $\Phi_y^{**}$ 、 $W^{**}$ 。

### 3. 求解模式

将式(6-17)式(6-18)式(6-19)的多项式代入式(6-6)三式可得 14 个独立方程,这样多项式补充解只有 8 个是独立的未知数;将式(6-17)~式(6-19)中的梁函数形式补充解代入式(6-6)中任两式,根据双曲正弦函数、双曲余弦函数的独立性,可将  $\Phi_{xy1}$ 、 $\Phi_{xy2}$ 、 $\Phi_{yy1}$ 、 $\Phi_{yy2}$  用  $W_{y1}$ 、 $W_{y2}$  表示,将  $\Phi_{xx1}$ 、 $\Phi_{xx2}$ 、 $\Phi_{yx1}$ 、 $\Phi_{yx2}$  用  $W_{x1}$ 、 $W_{x2}$  表示,这样梁函数部分补充解只有 4 个独立未知数。在实际计算中, $m$ 、 $n$  不可能取无穷大,设  $m$ 、 $n$  最大取  $M$ ,这样一般解析解式(6-17)、式(6-18)、式(6-19)共有  $12M+12$  个未知数。对于考虑剪切变形的各向异性矩形板,每边有三个边界条件,共有 12 个边界条件。将一般解析解代入 12 个边界条件中,形成 12 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数。根据正弦级数的正交性,可以得到  $12M$  个线性代数方程。矩形板每个角点处可有位移(如挠度  $W$ 、转角)或内力(如弯矩、剪力)等三个角点条件,共有 12 个角点条件,这样共建立  $12M+12$  个方程,可以求解  $12M+12$  个未知数,横向弯曲问题得解。

## 6.3 弯曲解析解数值验证部分

为了考查本书解的收敛性和稳定性,作者针对 5 层  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$  铺设四边固支矩形板在均布载荷作用下的横向弯曲进行计算:

$$\begin{array}{llll} \text{四边固支矩形板(CCCC)} & \xi = 0, 1 & \Phi_x = 0 & \Phi_y = 0 \quad W = 0 \\ & \eta = 0, 1 & \Phi_x = 0 & \Phi_y = 0 \quad W = 0 \end{array}$$

材料常数为

$$E_1 = 145\text{GPa} \quad E_2 = 9.6\text{GPa} \quad G_{12} = 4.1\text{GPa} \quad G_{13} = 4.14\text{GPa}$$

$$G_{23} = 3.212\text{GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

几何、载荷参数为  $a = b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.1\text{m}$ ,  $P = 10^4\text{N/m}^2$

对于级数解来说,其稳定性验证是必须的。为了验证本书解的稳定性,改变  $M$  计算相应板中心挠度。

表 6-1 表明当  $M$  增大时,解数值保持稳定;计算中发现,对于不同的材料、边界条件及铺层方式,所需计算项数需经具体计算确定。

表 6-1  $M$  变化时板中心挠度  $W(0.5, 0.5)$

$M$	4	6	12	18	30
$10^5 w$	0.15688	0.15692	0.15690	0.15690	0.15690

对于复合材料板结构,当其厚度很小时,板横向剪切变形亦很小,这时应该可按经典理论计算分析板结构,而此时按剪切变形理论计算结果应与经典理论结果相当。为此结合不同  $a/h$  针对具有 CCCC 及 SSSS 边界条件的  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$  层合板计算中心挠度值,计算按 FSDT 及 CLT 同时进行。结果反映在表 6-2 和表 6-3 中。

表 6-2  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$  CCCC 层合板中心挠度

FSDT 解与 CLT 解比较

$w$ \ $a/h$	25	50	100
FDST	0.000051322	0.00036084	0.0027779
CLT	0.000042802	0.00034242	0.0027390

表 6-3  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$  SSSS 层合板中心挠度

FSDT 解与 CLT 解比较

$w$ \ $a/h$	25	50	100
FDST	0.00011552	0.00088626	0.0070093
CLT	0.00010946	0.00087565	0.0070050

从表 6-2 和表 6-3 可看出当  $a/h$  增大到一定值时,FDST 解与 CLT 解已相差不大,对其他铺设角的层合板进行计算也可发现这一点,这也验证了本章所得一般解析解的正确性。

文献[1]应用列维法给出基于一阶剪切理论的四边简支正交异性层合板弯曲问题解析解。本书针对铺设角  $\theta$  逼近 0 的单层板中心位移进行计算,通过与参考文献[1]比较以分析层合板铺设角敏感性。

从表 6-4 可发现随着铺设角逼近 0 本书解逐渐稳定,并且与已有正交异性结果相对误差在 1‰以内,考虑到文献[1]值是在曲线上测量换算得到,表中反映的微小差异是测量本身误差带来的,这表明对于层合板铺设角的微小变化对层合板影响亦很小,同时也验证本书解的正确性。

表 6-4 SSSS 板铺设角敏感性计算结果

$\begin{matrix} w \\ \theta \\ M \end{matrix}$	1	0.1	0.01	0.0001	0.00001	0*
10	$4.3111 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3148 \times 10^{-5}$
20	$4.3111 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	
30	$4.3111 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	$4.3110 \times 10^{-5}$	
* 数据是根据参考解(文献[1])中图 1 测出的无量纲挠度值换算而得。						

文献[1]中材料常数为

$$E_1 = 143.6\text{GPa} \quad E_2 = 75.4\text{GPa} \quad G_{12} = 42.1\text{GPa}$$

$$G_{13} = 25.6\text{GPa} \quad G_{23} = 42.7\text{GPa} \quad \nu_{12} = 0.44$$

几何、载荷参数为  $a = b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.1\text{m}$ ,  $P = 10^4\text{N/m}^2$

又针对承受均布载荷的石墨/环氧四边 9 层简支层合板进行计算验证,板的宽厚比  $a/h$  分别取 10、100。计算结果表示在表 6-5 中,参考解由文献[8]计算所得,  $\bar{W} = \frac{10^3 w E_2}{q a^2}$ 。

表 6-5 中心挠度解比较

	$\bar{W}$ 模型	$a/h$	10	100
Anisotropic(1)	本书解	$M = 20$	4.2294	2.4674
	参考解		3.7323	2.4079
$(\theta = 45^\circ)$	CPT *	第 2 章	2.4508	2.4508

(续)

	$\bar{W}$ 模型	$a/h$	10	100
Anisotropic(2)  ( $\theta = 30^\circ$ )	本书解	$M = N = 20$  第 2 章	4. 6377	2. 7661
	参考解		4. 0500	2. 7000
	CPT		2. 7484	2. 7484

## 6.4 数值分析

下面按照上述方法进行数值计算,以研究弯扭耦合、横向剪切对板弯曲刚度弯曲内力的影响。

为考查材料各向异性程度、横向剪切效应对板弯曲状态的影响,本书选择两种复合材料进行分析,其材料 1 为强各向异性、强横向剪切效应材料,材料 2 为弱各向异性、弱横向剪切材料,其材料参数见表 6-6。

表 6-6 复合材料的工程参数

材料特性	$E_1/\text{GPa}$	$E_2/\text{GPa}$	$G_{12}/\text{GPa}$	$G_{13}/\text{GPa}$	$G_{23}/\text{GPa}$	$\gamma_{12}$
强各向异性(材料 1)	144. 79	9. 65	4. 14	4. 14	3. 212	0. 3
弱各向异性(材料 2)	143. 6	75. 4	42. 1	25. 6	42. 7	0. 44

### 1. 铺设参数对层合板影响分析数值结果

为了突出结构横向剪切效应影响,首先针对中等厚度(跨厚比  $a/h = 10$ )的层合板进行计算,取  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.1\text{m}$ ,  $q = 10^4\text{N/m}^2$ ,计算中取  $M = 26$ ,本书给出表 6-7 ~ 表 6-12,分别考察四边简支(SSSS)方板最大挠度及中心处最大弯矩、扭矩。在表 6-7 ~ 表 6-12 中每格 \* 位置数值为 FSDT 解(一阶理论解),\*\* 数值为 CLT 解(经典理论解)。

根据板理论

$$\text{板内最大弯矩 } M_1 = 0.5(M_x + M_x) + \sqrt{(M_x - M_y)^2 0.25 + M_{xy}^2}$$



板内最小弯矩  $M_2 = 0.5(M_x + M_y) - \sqrt{(M_x - M_y)^2 0.25 + M_{xy}^2}$

板内最大扭矩  $M_{12} = 2 \sqrt{(M_x - M_y)^2 0.25 + M_{xy}^2}$

表 6-9 ~ 表 6-12 给出四边简支板中心处最大弯矩  $M_1$ 、扭矩  $M_{12}$ 。

表 6-7 材料 1 的 SSSS 方板中心挠度  $10^4 w$

$\theta$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
3	1.4929 *	1.4665	1.3835	1.2790	1.2105	1.2012
	1.0656 **	1.0592	1.0292	0.9784	0.9204	0.8368
5	1.4929	1.4004	1.2067	1.0427	0.9598	0.9496
	1.0656	1.0116	0.8873	0.7710	0.7084	0.7005
9	1.4929	1.3751	1.1504	0.9780	0.8954	0.8854
	1.0656	0.9926	0.8422	0.7166	0.6516	0.6437
13	1.4929	1.3694	1.1380	0.9878	0.8820	0.8721
	1.0656	0.9811	0.8323	0.7045	0.6400	0.6321
75	1.4929	1.3638	1.1272	0.9526	0.8705	0.8060
	1.0656	0.9841	0.8237	0.6945	0.6300	0.6221

表 6-8 材料 2 的 SSSS 方板中心挠度  $10^4 w$

$\theta(^{\circ})$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
3	0.4266	0.4282	0.4323	0.4370	0.4402	0.4406
	0.4006	0.4019	0.4062	0.4110	0.4142	0.4146
5	0.4266	0.4273	0.4290	0.4310	0.4323	0.4325
	0.4006	0.4010	0.4023	0.4037	0.4046	0.4047
9	0.4266	0.4269	0.4276	0.4285	0.4290	0.4291
	0.4006	0.4007	0.4009	0.4012	0.4014	0.4014
75	0.4266	0.4267	0.4270	0.4273	0.4273	0.4276
	0.4006	0.4005	0.4003	0.40001	0.4000	0.3999

表 6-9 材料 1 的 SSSS 方板中心最大弯矩  $M_1/(qab)$

$\theta/(^\circ)$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
3	0.1221	0.1175	0.1040	0.0871	0.07401	0.0715
	0.1258	0.1239	0.1122	0.0822		0.0746
5	0.1221	0.1112	0.0878	0.0661	0.05309	0.0517
	0.1258	0.1153	0.0922	0.0685	0.05601	0.0543
9	0.1221	0.1088	0.0825	0.0601	0.0468	0.0486
	0.1258	0.1119	0.0859	0.0618	0.0475	0.0451
75	0.1221	0.1078	0.0803	0.0574	0.00429	0.0555
	0.1258	0.1118	0.0838	0.0594	0.00427	0.0375

表 6-10 材料 1 的 SSSS 方板中心最大扭矩  $10M_{12}/(qab)$

$\theta/(^\circ)$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
9	0.5565	0.4805	0.3270	0.1881	0.0948	0.0977
	0.5887	0.5048	0.3492	0.1971	0.0959	0.0812
75	0.5565	0.4745	0.3144	0.1703	0.0643	0.1178
	0.5887	0.5042	0.3343	0.1788	0.0560	0.0096

表 6-11 材料 2 的 SSSS 方板中心最大弯矩  $10M_1/(qab)$

$\theta/(^\circ)$ N	0°	10°	20°	30°	40°	45°
3	0.6031	0.6008	0.5941	0.5847	0.5771	0.5759
	0.6013	0.5993	0.5935	0.5851	0.5784	0.5773
5	0.6031	0.5977	0.5823	0.5601	0.5404	0.5370
	0.6013	0.5861	0.5812	0.5599	0.5410	0.5378
9	0.6031	0.5963	0.5768	0.5477	0.5175	0.5110
	0.6013	0.5946	0.5775	0.5470	0.5176	0.5114
75	0.6031	0.5968	0.5742	0.5414	0.5012	0.4835
	0.6013	0.5939	0.5728	0.5405	0.5012	0.4835

表 6-12 材料 2 的 SSSS 方板中心最大扭矩  $10M_{12}/(qab)$

$\theta/(^{\circ})$ $N$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$45^{\circ}$
3	0.1222	0.1188	0.1096	0.0972	0.0876	0.0862
	0.1206	0.1175	0.1090	0.0958	0.0887	0.0874
5	0.1222	0.1164	0.1002	0.0772	0.0568	0.0534
	0.1206	0.1150	0.0992	0.0769	0.0573	0.0541
9	0.1222	0.1153	0.0958	0.0666	0.0364	0.0300
	0.1206	0.1139	0.0946	0.0660	0.0366	0.0304
75	0.1222	0.1148	0.0937	0.0612	0.0215	0.0036
	0.1206	0.1133	0.0924	0.0604	0.0213	0.0037

又选择两种材料进行计算,材料参数如下:

材料 1:  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G_{12}/E_2 = 0.6$ ,  $G_{23}/E_2 = 0.5$ ,  $\gamma_{12} = 0.25$

材料 2:  $E_1/E_2 = 10$ ,  $G_{12}/E_2 = 0.33$ ,  $G_{23}/E_2 = 0.27$ ,  $\gamma_{12} = 0.3$

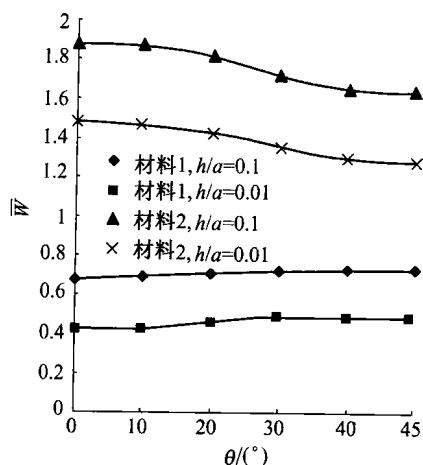


图 6-1 承受均布载荷的对称角铺设四边简支层合方板

无量纲挠度随铺设角变化

$$\bar{W} = wE_2h^3/100/qb^4$$

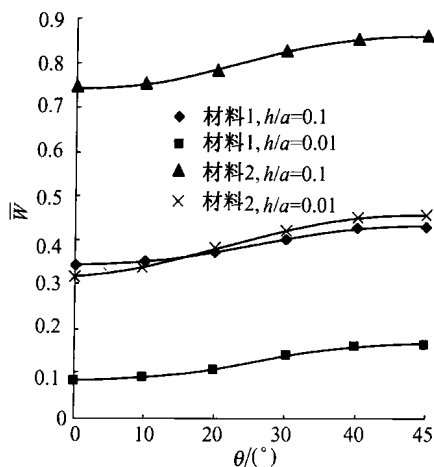


图 6-2 承受均布载荷的对称角铺设四边固支层合方板  
无量纲挠度随铺设角变化

$$\bar{W} = 10^2 w E_2 h^3 / q b^4$$

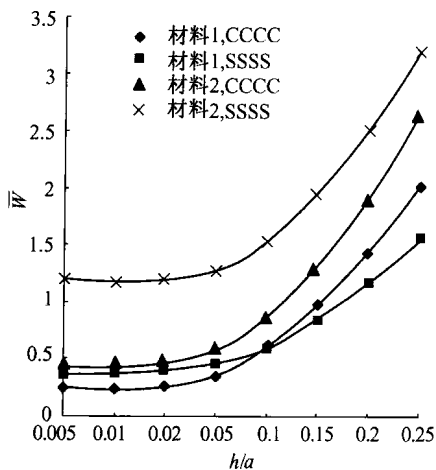


图 6-3 承受均布载荷的对称角铺设[45/-45/45]层合方板  
无量纲挠度随厚宽比 \$h/a\$ 变化

$$\bar{W} = 10^2 w E_2 h^3 / q b^4$$

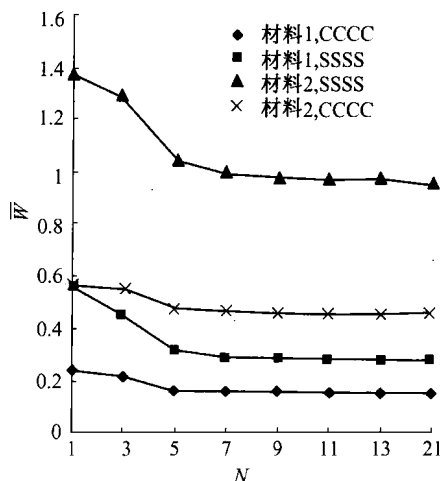


图 6-4 承受均布载荷的对称角铺设层合板  
无量纲挠度随铺设层数变化

$$(a/b=1, h/a=0.05, \theta=45^\circ); \bar{W}=10^2 w E_2 h^3 / q b^4$$

## 2. 结论

分析表 6-2 ~ 表 6-12、图 6-1 ~ 图 6-4 可以得到以下结论:

(1) 横向剪切效应对中厚层合板弯曲状态影响是明显的, 横向剪切效应增大了板挠度。比较可发现, 在同一厚度情况下, 对于不同铺设角、铺设层数, 相对于经典板理论解, 剪切理论解均有不同程度的增大。对于所选强各向异性、强横向剪切材料 1, 跨厚比为 10 的 SSSS 层合板中心挠度 FSDT 解与 CLT 解之比最小也达 1.3 左右。对于弱各向异性、弱横向剪切效应材料 2, 相同参数板挠度相应比值均小于材料 1 相应数值, 但工程中应用复合材料大都是属于材料 1 类型, 也就是说横向剪切效应当板跨厚比不非常大(如小于 50)时已不可忽略, 应当按剪切理论计算, CLT 理论低估了结构挠度。当采用刚度评估复合材料结构时, 依据 CLT 理论会得到偏于危险的结论, 这是值得警惕的。

(2) 弯扭耦合效应、横向剪切效应综合作用使对称角铺设层合板弯曲内力呈现复杂的变化。这表现在表 8、9 中, 对强各向异性材料, 当铺设角小于 45°, 即弯扭耦合较弱情况下, CLT 内力解一般大于 FSDT

内力解,但 FSDT 内力解与 CLT 内力解数值大致相仿。铺设角为  $45^\circ$  时,弯扭耦合效应最大,这时 FSDT 内力解与 CLT 内力解数值相差较大,对扭矩计算这种差异会显著,一般情况下 CLT 内力解是小于 FSDT 内力解。而对于弱各向异性材料,因为这种材料结构弯扭耦合效应较弱,横向剪切效应较弱,相应 FSDT 内力解与 CLT 内力解数值大致相仿,即使对  $45^\circ$  铺设角层合板也是这样。鉴于实际工程结构参数及载荷复杂,为安全起见,当结构跨厚比不是很大,在内力计算应尽量采用剪切理论计算分析。

(3) 不同边界条件的层合板结构受横向剪切效应影响程度有很大差异。结合其他数值结果发现,四边固支(CCCC)板中心挠度 FSDT 解与 CLT 解之比可达到 3,而四边简支(SSSS)板中心挠度 FSDT 解与 CLT 解之比只有 1.3 左右。这表明 CCCC 板受横向剪切效应影响程度要大于 SSSS 板。

(4) 板结构跨厚比对结构横向剪切效应有显著影响。即使对于材料横向剪切效应较明显的材料(如材料 1),当板跨厚比增加到一定值时( $a/h=50$ ),仍可忽略横向剪切效应按 CLT 理论计算,这说明此时结构的横向剪切效应很弱。在实际数值计算中发现,对于跨厚比很大的薄层合板,按剪切理论计算可能造成方程病态,这说明对横向剪切效应很弱的结构应按 CLT 理论分析计算。

(5) 材料的横向剪切程度对结构横向剪切效应有很大影响。综合分析本章各文可发现,材料一层合板不同程度地受横向剪切效应影响,但材料 2 的板结构受横向剪切效应影响相应就较小。而材料 2 的  $G_{13}$ 、 $G_{23}$  仍比  $E_1$  小,约为后者的  $1/6$ ,材料 1 的  $G_{13}$ 、 $G_{23}$  也只约为  $E_1$  的  $1/35$  左右。

(6) 从表 6-2 ~ 表 6-12、图 6-1 ~ 图 6-4 发现铺设角  $\theta$  对对称角叠层板挠度、弯矩、扭矩有重大影响:对于 SSSS 方板,板中心挠度、中心最大弯矩都在铺设角  $\theta$  为  $45^\circ$  时最小,一般在铺设角  $\theta$  为  $0^\circ$  时二者升为最大,对最大扭矩情况复杂一些,一般来看板中心最大扭矩在铺设角  $\theta$  为  $0^\circ$  时最大,在大多数情况下最大扭矩在铺设角  $\theta$  为  $45^\circ$

时降为最小,少数情况下最大扭矩发生在  $45^\circ$  附近。

(7) 图 6-4 表明,铺设层数对层合板挠度内力有较大影响。一般情况下,对于具有同一厚度、同一铺设角的层合板,铺设层数  $N$  增大时板中心挠度不同程度地减小,板中心最大弯矩、最大扭矩在大多数情况下,也随着  $N$  的增加而减小,相应板承载能力在增大。

## 6.5 基于一阶剪切变形理论的对称角铺设 复合材料矩形板屈曲和振动问题解析

### 1. 直角坐标系下的控制方程

基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料矩形板屈曲和振动问题控制方程合写为下式:

$$L_{11}\Phi_x + L_{12}\Phi_y + L_{13}w = 0 \quad (6-24a)$$

$$L_{12}\Phi_x + L_{22}\Phi_y + L_{23}w = 0 \quad (6-24b)$$

$$L_{13}\Phi_x + L_{23}\Phi_y + L_{33}w = 0 \quad (6-24c)$$

式中:

$$L_{11} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{55}a^2$$

$$L_{12} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (D_{12} + D_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 D_{26} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{45}a^2$$

$$L_{13} = -A_{55}a \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{45}a\alpha \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$L_{22} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{44}a^2$$

$$L_{23} = -A_{45}a \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{44}a\alpha \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$L_{33} = \left( A_{55} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{45}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{44}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) +$$

$$\left( N_x \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) - \rho a^2 \omega^2$$

$N_x, N_y, N_{xy}$  为板中面单位长度上  $x, y$  方向压力载荷、剪力载荷,  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。对于屈曲问题, 方程(6-24)中要舍去  $\omega$ 。对于振动问题, 方程(6-28)要舍去  $N_x, N_y, N_{xy}$ 。

## 2. 求解过程

设方程(6-24)有如下齐次解:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \\ \Phi_x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \\ \Phi_y &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \end{aligned} \quad (6-25)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$\begin{aligned} f_m(\eta) &= G e^{i m \sigma \eta r} \\ g_m(\eta) &= E e^{i m \sigma \eta r} \\ h_m(\eta) &= F e^{i m \sigma \eta r} \end{aligned} \quad (6-26)$$

式中:  $m$  为非 0 整数,  $G, E$  和  $F$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

为了使后续表述更加紧凑, 引入如下标注:

$$\begin{aligned} LL_{11} &= (D_{11} + 2D_{16}\alpha r + \alpha^2 D_{66}r^2)(m\pi)^2 + A_{55}a^2 \\ LL_{12} &= (D_{16} + (D_{12} + D_{66})\alpha r + \alpha^2 D_{26}r^2)(m\pi)^2 + A_{45}a^2 \\ LL_{13} &= (A_{55}a + A_{45}\alpha r)(m\pi) \\ LL_{22} &= (D_{66} + 2D_{26}\alpha r + D_{22}\alpha^2 r^2)(m\pi)^2 + A_{44}a^2 \\ LL_{23} &= (A_{45}a + A_{44}\alpha r)(m\pi) \\ LL_{33} &= (A_{55} + 2A_{45}\alpha r + A_{44}\alpha^2 r^2)(m\pi)^2 + \\ &\quad (N_x + 2N_{xy}\alpha r + N_y\alpha^2 r^2)(m\pi)^2 - \rho\omega^2 a^2 \end{aligned}$$



将式(6-25)和式(6-26)代入方程(6-24)可得特征方程组:

$$\begin{bmatrix} LL_{11} & LL_{12} & LL_{13} \\ LL_{12} & LL_{22} & LL_{23} \\ LL_{13} & LL_{23} & LL_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G \\ E \\ F \end{Bmatrix} = 0 \quad (6-27)$$

或

$$[LL_{kj}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} G \\ E \\ F \end{Bmatrix} = 0 \quad (6-28)$$

特征方程可由下式推导得出:  $\det[LL_{kj}] = 0$

特征方程为6阶代数方程:

$$S_{60} + S_{51}\alpha r + S_{42}\alpha^2 r^2 + S_{33}\alpha^3 r^3 + S_{24}\alpha^4 r^4 + S_{15}\alpha^5 r^5 + S_{06}\alpha^6 r^6 = 0 \quad (6-29)$$

式中:  $r$  是  $m$  的函数,  $S_{kl}$  具体形式复杂, 本节略。

式(6-29)有4个特征根。方程(6-29)根可以标记为  $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3, 5$ )。随着  $m$  和频率  $\omega$  或中面载荷  $N_x, N_y, N_{xy}$  组合的变化, 方程(6-29)特征根可能是成对的共轭复数 ( $r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k$ ), 或者是成对的实数根 ( $r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1}$ )。采取类似的步骤, 可得  $w$  齐次解:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} (W_{k,m} + W_{k+1,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{3km} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{4km} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (6-30)$$

同样可得其他两个函数的齐次解, 三个位移函数齐次解合写为下式:

$$(\Phi_x, \Phi_y, w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \dots \}$$

$$\begin{aligned} & (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (6-31) \end{aligned}$$

式中:  $E_{jkm}, F_{jkm}, G_{jkm} (j=1, 2, 3; k=1, 3, 5)$  为待定实数常数。

定义 cc, sc, cs, ss 分别代表  $\cosh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)$ ,  $\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)$ ,  $\cosh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)$ ,  $\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)$ 。sins3, sinc3, sins4, sinc4 分别代表  $\cos m\pi(a_k \eta + \xi)$ ,  $\sin m\pi(a_k \eta + \xi)$ ,  $\sin m\pi(a_{k+1} \eta + \xi)$ ,  $\cos m\pi(a_{k+1} \eta + \xi)$ 。

将式(6-31)代入式(6-24)的任意 2 个方程式, 根据基函数 cc, sc, cs, ss 或 sins3, sinc3, sins4 的线性无关性, 可以得到如下系数关系矩阵:

$$\begin{bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

考虑一般性, 再设

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i n \pi s \xi} e^{i n \pi \eta} \\ \Phi_y &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i n \pi s \xi} e^{i n \pi \eta} \\ w &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi s \xi} e^{i n \pi \eta} \end{aligned} \quad (6-33)$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

类似地, 可得另一个特征方程(6-34)、6 个特征根  $s_k, s_{k+1} (k=1, 3, 5)$  和关系矩阵(6-35):

$$T_{60}s^6 + T_{51}s^5\alpha + T_{42}s^4\alpha^2 + T_{33}s^3\alpha^3 + T_{24}s^2\alpha^4 + T_{15}s\alpha^5 + T_{06}\alpha^6 = 0 \quad (6-34)$$

$$\begin{bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix} \quad (6-35)$$

另一组齐次解  $w^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*$  可写为如下实数级数:

$$\begin{aligned} (\Phi_x^*, \Phi_y^*, w^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} \end{aligned} \quad (6-36)$$

### 补充解

由于偏微分方程组复杂性,当  $m=0$  (或  $n=0$ ) 时的补充解推导也很复杂。为简化工作,将控制方程组的 3 个方程简化为单一方程。

引入势函数  $\Phi$ , 引进微分算子  $D_0$ , 它是以算子  $L_{ij}$  组成得  $3 \times 3$  行列式, 并令  $D_{kl}(k, l=1, 2, 3)$  表示给该行列式的代数余子式。使

$$\begin{aligned} \Phi_x &= (L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22})\Phi \\ \Phi_y &= (L_{13}L_{12} - L_{23}L_{11})\Phi \\ w &= (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{12})\Phi \end{aligned} \quad (6-37)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= f_{x10} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + f_{x01} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + f_{x30} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + f_{x21} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + f_{x12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2} + f_{x03} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \\
\Phi_y &= f_{y10} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + f_{y01} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + f_{y30} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + f_{y21} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + f_{y12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2} + f_{y03} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \\
w &= w_{00} \Phi + w_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + w_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + w_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + w_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + w_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \\
&\quad w_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + w_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + w_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} \quad (6-38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= \left( f_{x10} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + f_{x01} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + f_{x30} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + f_{x21} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + f_{x12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2} + f_{x03} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{w_{00}} \\
\Phi_y &= \left( f_{y10} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + f_{y01} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + f_{y30} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + f_{y21} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + f_{y12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2} + f_{y03} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{w_{00}} \\
w &= \left( w_{00} \Phi + w_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + w_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + w_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + w_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + w_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \right. \\
&\quad \left. w_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + w_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + w_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} \right) \frac{1}{w_{00}} \quad (6-39)
\end{aligned}$$

式中:  $f_{x10}, f_{x01}, \dots, f_{x03}, f_{y10}, f_{y01}, \dots, f_{y03}, w_{00}, w_{20}, \dots, w_{04}$  的表达式复杂, 具体形式略去。

式(6-37)满足式(6-24a)(6-24b)。将式(6-37)代入式(6-24c)可得:

$$\begin{aligned}
&(L_{11}L_{22}L_{33} - L_{12}L_{12}L_{33} - L_{23}L_{23}L_{11} + L_{13}L_{12}L_{23} + \\
&L_{23}L_{13}L_{12} - L_{13}L_{13}L_{22})\Phi = 0 \quad (6-40)
\end{aligned}$$

展开上式, 可得 6 阶偏微分方程:

$$\begin{aligned}
&SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\
&SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\
&SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + SS_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6-41)
\end{aligned}$$

式中:  $SS_{60}, SS_{51}, \dots, SS_{02}$  的表达式复杂, 具体形式略去。

**承受一对边均布压力载荷  $N_x$  矩形板的屈曲问题补充解**

对于承受一对边均布压力载荷  $N_x$  矩形板的屈曲问题, 式(6-40)可改写为:

$$\begin{aligned} & SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\ & SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ & SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (6-42)$$

$\Phi$  的  $\xi$  方向的补充解可以通过求解(6-43)获得:

$$SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (6-43)$$

式(6-43)有6个特征根, 可标注为  $h_k, h_{k+1}$  ( $k=1, 3$ ),  $h_5$  和  $h_6$  为0。 $h_k, h_{k+1}$  ( $k=1, 3$ ) 可能是复数根 ( $h_k = \chi_k + i\lambda_k, h_{k+1} = \chi_k - i\lambda_k$ ), 或实数根 ( $h_k = \chi_k, h_{k+1} = \chi_{k+1}$ )。

定义函数

$$\begin{aligned} & \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) = \\ & \left[ \begin{aligned} & e^{\chi_k} (f_{xk} \cos \lambda_k \xi + f_{xk+1} \sin \lambda_k \xi), \text{ 当 } h_k = \chi_k + i\lambda_k, h_{k+1} = \chi_k - i\lambda_k \\ & f_{xk} \sin \lambda_k \xi + f_{xk+1} \sin \lambda_k (1 - \xi), \text{ 当 } h_k = i\lambda_k, h_{k+1} = -i\lambda_k \\ & f_{xk1} \frac{\sinh \chi_k \xi}{\sinh \chi_k} + f_{xk+1} \frac{\sinh \chi_k (1 - \xi)}{\sinh \chi_k}, \text{ 当 } h_k = \chi_k, h_{k+1} = -\chi_k \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (6-44)$$

这样方程(6-43)的解可以写为下式:

$$\Phi = g_1 + g_2(\xi - 0.5) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) \quad (6-45)$$

式中:  $g_j$  ( $j=1, 2$ ),  $(f_{xk}, f_{xk+1}, k=1, 3)$  为待定常数。

$\Phi$  的  $\eta$  方向的补充解可以通过求解式(6-50)获得:

$$SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = 0 \quad (6-46)$$

$$\begin{aligned} \Phi^* = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & + \Gamma(\tau_1, \tau_2, \eta, f_{y1}, f_{y2}) \end{aligned} \quad (6-47)$$

式中:  $t_j(j=1,2,3,4)$ ,  $f_{y1}, f_{y2}$  为待定常数。

在引入其他代数多项式基础上,  $\Phi$  全补充解合写为:

$$\begin{aligned} \Phi^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\eta - 0.5)^2 + t_4(\eta - 0.5)^3 + \\ & t_5(\eta - 0.5) + t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\ & \Gamma(\tau_1, \tau_2, \eta, f_{y1}, f_{y2}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) \end{aligned} \quad (6-48)$$

式中:  $t_j(j=1,2,\dots,6)$  和  $(f_{y1}, f_{y2})$ ;  $(f_{xk}, f_{xk+1}, k=1,3)$  为 12 个待定常数。

$\Phi_x, \Phi_y, w$  的全补充解可以通过式(6-39)获得。

承受两对边均布压力载荷  $N_x$  和  $N_y$  矩形板的屈曲问题补充解

对于承受两对边均布压力载荷  $N_x$  和  $N_y$  的矩形板屈曲问题,式(6-40)可改写为:

$$\begin{aligned} & SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\ & SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ & SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (6-49)$$

$\Phi$  的  $\eta$  方向的补充解可以通过求解(6-50)获得:

$$SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6-50)$$

式(6-50)有 6 个特征根,4 个特征根可标注为  $\tau_k, \tau_{k+1}(k=1,$

3),  $\tau_5$  和  $\tau_6$  为 0。  $\tau_k, \tau_{k+1} (k=1, 3)$  可能是共轭复数 ( $\tau_k = \chi_k + i\lambda_k, \tau_{k+1} = \chi_k - i\lambda_k$ ), 或实数根 ( $\tau_k = \chi_k, \tau_{k+1} = \chi_{k+1}$ )。

这样方程(6-50)的解可以写为下式:

$$\Phi = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) \quad (6-51)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4), (f_{yk}, f_{yk+1}, k=1, 3)$  为待定常数。

$\Phi$  的  $\xi$  方向的补充解可以通过求解(6-52)获得:

$$SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (6-52)$$

式(6-52)有 6 个特征根, 可标注为  $h_k, h_{k+1} (k=1, 3), h_5$  和  $h_6$  为 0。  $h_k, h_{k+1} (k=1, 3)$  可能是共轭复数根 ( $h_k = \chi_k + i\lambda_k, h_{k+1} = \chi_k - i\lambda_k$ ), 或成对的实数根 ( $h_k = \chi_k, h_{k+1} = \chi_{k+1}$ )。

这样方程(6-52)的解可以写为下式:

$$\Phi = t_3 + t_4(\xi - 0.5) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) \quad (6-53)$$

式中:  $t_j (j=3, 4), (f_{xk}, f_{xk+1}, k=1, 3)$  为待定常数。

在引入其他代数多项式基础上,  $\Phi$  全补充解合写为:

$$\Phi^{**} = t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) \quad (6-54)$$

式中:  $t_j (j=1, 2, 3, 4), (f_{xk}, f_{xk+1}, k=1, 3)$  和  $(f_{yk}, f_{yk+1}, k=1, 3)$  为 12 个待定常数。

$\Phi_x, \Phi_y, w$  的全补充解可以通过式(6-39)获得。

承受两对边均布压力载荷  $N_x$ 、和  $N_y$  和四边剪切  $N_{xy}$  矩形板的屈曲问题补充解

承受两对边均布压力载荷  $N_x$ 、和  $N_y$  和四边剪切  $N_{xy}$  矩形板的屈曲

问题,  $\Phi$  的全补充解合写为:

$$\begin{aligned}\Phi^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\xi - 0.5) + t_4((\xi - 0.5)(\eta - 0.5) - \\ & \frac{SS_{11}}{2(SS_{20} + SS_{02})}((\xi - 0.5)^2 + (\eta - 0.5)^2) + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{y,k+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{x,k+1})\end{aligned}\quad (6-55)$$

采取类似分析,可以得到承受四边剪切  $N_{xy}$  矩形板的屈曲问题补充解

$$\begin{aligned}\Phi^{**} = & t_1 + t_2(\eta - 0.5) + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5)^2 + \\ & t_5(\xi - 0.5)^2 + t_6(\eta - 0.5)^3 + t_7(\xi - 0.5)^3 + \\ & t_8((\xi - 0.5)(\eta - 0.5) - \frac{SS_{11}}{48(SS_{40} + SS_{04})}((\xi - 0.5)^4 + \\ & (\eta - 0.5)^4) + \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{y,k+1}) + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{x,k+1}))\end{aligned}\quad (6-56)$$

相应问题的  $w^{**}$ ,  $\Phi_x^{**}$ ,  $\Phi_y^{**}$  全补充解可以通过式(6-39)求解。

### 矩形板自由振动问题补充解

矩形板自由振动问题,式(6-40)可写为:

$$\begin{aligned}& SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\ & SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ & SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + SS_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + SS_{00} \Phi = 0\end{aligned}\quad (6-57)$$

式中:  $SS_{60}, SS_{51}, \dots, SS_{00}$  的表达式复杂,具体形式略去。



$\Phi$  的  $\xi$  方向的补充解可以通过求解(6-58)获得:

$$SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + SS_{00} \Phi = 0 \quad (6-58)$$

式(6-58)有6个特征根,可标注为  $h_k, h_{k+1}$  ( $k=1,3,5$ )。 $h_k, h_{k+1}$  ( $k=1,3,5$ )可能是共轭复数,或实数根。

引入式(6-44),方程(6-58)解可以写为:

$$\Phi = \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) \quad (6-59)$$

式中:  $f_{xk}, f_{xk+1}$  ( $k=1,3,5$ )为待定常数。

$\Phi$  的  $\eta$  方向的补充解可以通过求解(6-60)获得:

$$SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + SS_{00} \Phi = 0 \quad (6-60)$$

式(6-60)有6个特征根,可标注为  $\tau_k, \tau_{k+1}$  ( $k=1,3,5$ )。 $\tau_k, \tau_{k+1}$  ( $k=1,3,5$ )可能是共轭复数或实数根。这样补充解可写为:

$$\Phi^* = \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) \quad (6-61)$$

式中:  $f_{yk}, f_{yk+1}$  ( $k=1,3,5$ )为待定常数。

$\Phi$  全补充解合写为:

$$\Phi^{**} = \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) \quad (6-62)$$

式中:  $(f_{xk}, f_{xk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, k=1,3,5)$ 为12个待定常数。

相应问题的  $w^{**}, \Phi_x^{**}, \Phi_y^{**}$  全补充解可以通过式(6-39)求解。

基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料矩形板屈曲和振动问题一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理,可将齐次解、补充解组合起来,可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \quad (6-63)$$

$$\begin{aligned} \Phi_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (Z_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (Z_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (Z_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (Z_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (T_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (T_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (T_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (T_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \Phi_x^{**} \end{aligned} \quad (6-64)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (R_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (R_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (R_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (R_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (S_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (S_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (S_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (S_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \Phi_y^{**}
\end{aligned} \tag{6-65}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5)$  和补充解中 12 个待定常数都是未知常数。

实际计算中, 设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解 (6-63)、(6-65)、(6-65) 共有  $12M+12$  个未知数 ( $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5)$ ,  $t_j (j=1, 2, \dots)$  和  $(f_{xk}, f_{xk+1}, f_{yk}, f_{yk+1})$ )。对于矩形板 屈曲、振动问题, 共有 12 个独立的边界条件。将解析解代入 12 个边界条件中, 形成 12 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $12M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , 根据该处 挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $12M+12$  个线性方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \tag{6-66}$$

式中:  $K$  为  $(12M+12) \times (8M+12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, t_1, t_2, \dots, \}$$

当方程 (6-66) 有异于零的解 (即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $t_j (j=1, 2, \dots, 12)$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  或  $(N_x, N_y, N_{xy})$  即为所求频率或屈曲载荷。对于屈曲问题, 要注意求得载荷最小值。

# 第7章 基于一阶剪切变形的对称角 铺设复合材料斜形板 静力解析

对于斜形板,由于其外形引起的边界条件满足困难,对于各向同性斜形板用常规数学方法处理就很困难。对于复合材料结构来说,剪切理论和各种耦合效应反映在控制方程上。更带来数学求解的困难。在前几章引入的复级数方法和斜坐标变换无疑可用来求解基于一阶剪切变形理论的对称角铺设斜形层合板问题,本章采用上述方法建立基于一阶剪切变形理论的对称角铺设层合斜形板静力响应问题一般解析解。同样采取算例计算验证了所得到一般解析解的收敛性、稳定性,并进行数值计算研究了复合材料斜形层合板各设计参数对复合材料板力学特性的影响。

## 7.1 对称角铺设斜形板理论分析

### 1. 坐标变换

斜形板坐标系表示在图 7-1 中,引入斜坐标系  $\xi - \eta$ , 坐标变换式:

$$\begin{cases} x = a\xi + b\eta\cos\beta \\ y = \eta b\sin\beta \end{cases} \quad (7-1)$$

式(7-1)中:  $a$ 、 $b$ ——斜板在  $(x, y)$  坐标系中的长、高;

$\beta$ ——斜角。

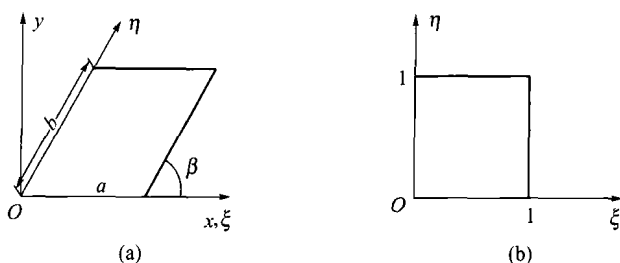


图 7-1 斜坐标系

有如下变换式：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{\cot\beta}{a} & \frac{1}{b\sin\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (7-2)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{\cot^2\beta}{a^2} & \frac{1}{b^2 \sin^2\beta} & -\frac{2\cot\beta}{ab\sin\beta} \\ -\frac{\cot\beta}{a^2} & 0 & \frac{1}{ab\sin\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (7-3)$$

## 2. 斜坐标系下控制方程

考虑斜形层合板, 层合层数为  $N$ , 铺设方式为对称角铺设板。在  $(x, y)$  坐标系下的控制方程如下式

$$\begin{cases} L_{11}\Phi_x + L_{12}\Phi_y + L_{13}w = 0 \\ L_{12}\Phi_x + L_{22}\Phi_y + L_{23}w = 0 \\ L_{13}\Phi_x + L_{23}\Phi_y + L_{33}w = q \end{cases} \quad (7-4)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{55} \\ L_{12} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{45} \\ L_{13} = -A_{55} \frac{\partial}{\partial x} - A_{45} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{22} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{44} \\ L_{23} = -A_{45} \frac{\partial}{\partial x} - A_{44} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{33} = \left( A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (7-5)$$

$w$ ——挠度；

$\Phi_x, \Phi_y$ ——横向法线与  $y$  和  $x$  轴的转角；

$q$ ——横向载荷；

$A_{ij} (i, j = 4, 5)$ 、 $D_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ ——剪切刚度、弯曲刚度；

$\alpha = a/b$ ——板的长宽比。

### 3. 斜角坐标系下控制方程

运用坐标变换,斜坐标系  $\xi - \eta$  下,控制方程变化为

$$\left\{ \begin{array}{l} LL_{11} \Phi_x + LL_{12} \Phi_y + LL_{13} w = 0 \\ LL_{12} \Phi_x + LL_{22} \Phi_y + LL_{23} w = 0 \\ LL_{13} \Phi_x + LL_{23} \Phi_y + LL_{33} w = qa^2 \end{array} \right. \quad (7-6)$$

式中：

$$L_{11} = (D_{11} - 2D_{16} \cot \beta + D_{66} \cot^2 \beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(2D_{16} - 2D_{66} \cot \beta)}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$\alpha^2 \frac{D_{66}}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{55} a^2$$

$$L_{12} = (D_{16} - (D_{12} + D_{66}) \cot \beta + D_{26} \cot^2 \beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{((D_{12} + D_{66}) - 2D_{26}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \alpha^2 \frac{D_{26}}{\sin^2\beta} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{45}a^2 \\
L_{13} &= (-A_{55} + A_{45}\cot\beta)a \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{45}}{\sin\beta} a\alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \\
L_{22} &= (D_{66} - 2D_{26}\cot\beta + D_{22}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
& \frac{(2D_{26} - 2D_{22}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{44}a^2 \\
L_{23} &= -(A_{45} - A_{44}\cot\beta)a \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{44}}{\sin\beta} a\alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \\
L_{33} &= \left( (A_{55} - 2A_{45}\cot\beta + A_{44}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right. \\
& \left. \frac{(2A_{45} - 2A_{44}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{44}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right)
\end{aligned}$$

相应地,内力及变形也可变换成斜坐标系下形式。

#### 4. 求解过程

采用与第6章类似的过程可求得考虑剪切变形的层合斜板一般解析解

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin(n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin(n\pi(c_k \xi + \eta))}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& t_1 + t_2(\xi - 0.5) + t_3(\eta - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 + t_5(\eta - 0.5)^2 + \\
& t_6(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + t_7(\xi - 0.5)^3 + t_8(\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_9(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^2 + t_{10}(\eta - 0.5)^3 + \\
& W_{y1} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0)} + W_{y2} \frac{\sinh(1 - \eta)a_0}{\sinh(a_0)} + W_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0)} + \\
& W_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi)c_0}{\sinh(c_0)} + W^{**} \quad (7-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1 - \eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1 - \eta)) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin m\pi(a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1 - \eta)) \sin m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& \left. Z_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1 - \eta)) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& \left. T_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1 - \xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& T_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k\xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& T_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k\xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& T_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k\xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \Big) + \\
& t_{11} + t_{12}(\xi - 0.5) + t_{13}(\eta - 0.5) + t_{14}(\xi - 0.5)^2 + t_{15}(\eta - 0.5)^2 + \\
& t_{16}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \Phi_{xy1} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{xy2} \frac{\sinh(1-\eta)a_0}{\sinh(a_0)} + \\
& \Phi_{xx1} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0)} + \Phi_{xx2} \frac{\sinh(1-\xi)c_0}{\sinh(c_0)} + \Phi_x^{**} \quad (7-8) \\
& \Phi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k\eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh m\pi b_k} + \right. \\
& R_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k\eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k\eta) \cos m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& R_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos m\pi(a_k\eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh(m\pi b_k\eta) \sin m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \right. \\
& R_{11k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin m\pi(a_k\eta + \xi)}{\sinh(m\pi b_k)} \Big) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos m\pi(a_k(1-\eta) + 1 - \xi)}{\sinh m\pi b_k} + \right. \\
& R_{31k} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos m\pi(a_k \eta + \xi)}{\sinh m\pi b_k} \left. \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& S_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& S_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \sin n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& S_{11k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \sin n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh(n\pi d_k \xi) \cos n\pi(c_k(1-\xi) + 1 - \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \right. \\
& S_{31k} \frac{\sinh(n\pi d_k(1-\xi)) \cos n\pi(c_k \xi + \eta)}{\sinh(n\pi d_k)} \left. \right) + \\
& t_{17} + t_{18}(\xi - 0.5) + t_{19}(\eta - 0.5) + t_{20}(\xi - 0.5)^2 + t_{21}(\eta - 0.5)^2 + \\
& t_{22}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \Phi_{\gamma^1} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma^2} \frac{\sinh(1-\eta)a_0}{\sinh(a_0)} + \\
& \Phi_{\gamma^1} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0)} + \Phi_{\gamma^2} \frac{\sinh(1-\xi)c_0}{\sinh(c_0)} + \Phi_{\gamma}^{**} \quad (7-9)
\end{aligned}$$

$G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 22)$  和  $W_{x1}, W_{x2}, W_{y1}, W_{y2}$  是待定常数,  $W^{**}, \Phi_x^{**}, \Phi_y^{**}$  是特解。

## 5. 边界条件

典型的简支边界条件 S、固支边界条件 C、自由边界条件 F 表示如下：

$$\begin{cases} \text{S: } w = M_n = \Phi_t = 0 \\ \text{C: } w = \Phi_n = \Phi_t = 0 \\ \text{F: } Q_n = M_n = M_{nt} = 0 \end{cases} \quad (7-10)$$

上面  $M_n$ ——板边界的法向弯矩；

$$\Phi_n = \Phi_x n_x + \Phi_y n_y, \Phi_t = -\Phi_x n_y + \Phi_y n_x \Phi_n,$$

$\Phi_t$ ——板边界法向、切向转角；

下标  $n, t$ ——板边界的法向、切向。

$$\begin{cases} M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \\ Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y \end{cases} \quad (7-11)$$

式中： $n_x = \cos\phi, n_y = \sin\phi$ ， $\phi$  为板边界法向与  $x$  轴的夹角。运用坐标变换，边界条件可改用  $\xi$  和  $\eta$  表示。

## 6. 角点条件

类似前几章可建立板的 4 个板角点条件

### 1) 四边固支板

$$w(0,0) = 0, \quad w(1,0) = 0, \quad w(1,1) = 0, \quad w(0,1) = 0$$

$$\Phi_x(0,0) = 0, \quad \Phi_x(1,0) = 0, \quad \Phi_x(1,1) = 0, \quad \Phi_x(0,1) = 0$$

$$\Phi_y(0,0) = 0, \quad \Phi_y(1,0) = 0, \quad \Phi_y(1,1) = 0, \quad \Phi_y(0,1) = 0$$

### 2) 四边简支板

$$w(0,0) = 0, \quad w(1,0) = 0, \quad w(1,1) = 0, \quad w(0,1) = 0$$

$$M_\xi(0,0) = 0, \quad M_\xi(1,0) = 0, \quad M_\xi(1,1) = 0, \quad M_\xi(0,1) = 0$$

$$M_\eta(0,0) = 0, \quad M_\eta(1,0) = 0, \quad M_\eta(1,1) = 0, \quad M_\eta(0,1) = 0$$

$$\Phi_x(0,0) = 0, \quad \Phi_x(1,0) = 0, \quad \Phi_x(1,1) = 0, \quad \Phi_x(0,1) = 0$$

$$\Phi_y(0,0) = 0, \quad \Phi_y(1,0) = 0, \quad \Phi_y(1,1) = 0, \quad \Phi_y(0,1) = 0$$

## 7. 求解过程

采用物理方程,可容易求得以待定常数表示的内力  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ 。如果级数分别只取  $M$  项,按照一般解析解有  $12M + 26$  待定常数,即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2, 3), t_j (j=1, 2, \dots, 22)$  和  $W_{x1}, W_{x2}, W_{y1}, W_{y2}$ 。将多项式补充解代入式(7-6),可得 14 个独立方程。对于考虑剪切变形的各向异性板,每边有 3 个边界条件,共有 12 个边界条件。将一般解析解代入 12 个边界条件中,形成 12 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数。根据正弦级数的正交性,可以得到  $12M$  个线性代数方程。斜形板每个角点处可有位移(如挠度)或内力(如弯矩、剪力)等 3 个角点条件,共有 12 个角点条件,这样共建立  $12M + 26$  个方程,可以求解  $12M + 26$  个未知数,横向弯曲问题得解。

## 7.2 对称角铺设斜形板弯曲解析解的数值研究

针对四边简支、固支板,展开数值计算,以研究解的稳定性、收敛性。

选择石墨/环氧材料进行分析,材料参数:

$$E_1 = 40\text{GPa}, \quad E_2 = 1\text{GPa}, \quad G_{12} = 0.6\text{GPa}$$

$$G_{12} = G_{13}, \quad G_{23} = 0.5G_{12}, \quad \gamma_{12} = 0.25$$

四边简支(SSSS)板和四边固支(CCCC)板角点条件为

$$w(0,0) = 0, \quad w(1,0) = 0, \quad w(1,1) = 0, \quad w(0,1) = 0$$

$$\Phi_x(0,0) = 0, \quad \Phi_x(1,0) = 0, \quad \Phi_x(1,1) = 0, \quad \Phi_x(0,1) = 0$$

$$\Phi_y(0,0) = 0, \quad \Phi_y(1,0) = 0, \quad \Phi_y(1,1) = 0, \quad \Phi_y(0,1) = 0$$

### 1. 稳定性

收敛性验证计算选择承受均布载荷  $q$  的斜形板,其几何尺寸为  $b/a = 1.0, h/a = 0.1$ ,铺设层数为 9,铺设方式为对称角铺设  $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$ 。计算结果见表 7-1,可见本书级数解稳定性较好。

表 7-1 板中心最大无量纲挠度稳定性计算结果

$$\bar{w} = 10^3 w E_2 h^3 / (q a^3 b \sin \beta)$$

$M$	10	20	40	56	60
SSSS	3.923	4.004	3.987	3.995	3.995
CCCC	2.351	2.352	2.351	2.351	2.351

## 2. 收敛性

选择四边简支层合板,为均布载荷  $q$ , 9 层  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$  铺设,  $b/a = 1.0$ ,  $h/a = 0.1$ 。变化  $\beta$  研究解的变化, 结果反映在表 7-2 中。当板较薄时本书解与经典理论解接近, 当斜角接近  $90^\circ$ , 本书解逼近矩形板结果。表明本书解是可靠的。

表 7-2 挠度  $\bar{W}^* = 10^3 w E_2 h^3 / q a^4$  解

	模 型	$\bar{W}^*$
$\beta = 89^\circ$	本书解 $a/h = 0.01$	2.4712
$\beta = 89.5^\circ$		2.4690
$\beta = 90^\circ$		2.4079
$\beta = 80^\circ$	参考解 <sup>[8]</sup>	2.4079
$\beta = 80^\circ$	本书解 $a/h = 0.01$	2.4598
$\beta = 80^\circ$	CPT(第 4 章方法)	2.4425

## 7.3 弯曲数值结果及讨论

下面针对如下材料进行分析计算, 材料参数如下:

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, \quad E_2 = 10.3 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = G_{12}, \quad G_{23} = G_{12}, \quad \gamma_{12} = 0.28$$

$$G_{13} = G_{12}, \quad \gamma_{13} = \gamma_{12}$$

考虑四边简支、固支边界进行计算。

计算中变化铺设角  $\theta$ , 铺设层数  $N$ , 长宽比  $a/b$ , 斜角和厚长比

$h/a$ 。铺设角  $\theta$  在  $0^\circ \sim 45^\circ$ 。  $N$  在  $1 \sim 21$ ,  $h/a$  在  $0.005 \sim 0.25$ 。以此研究上述各参数对板挠度的影响,结果反映在图 7-2 ~ 图 7-6 中。

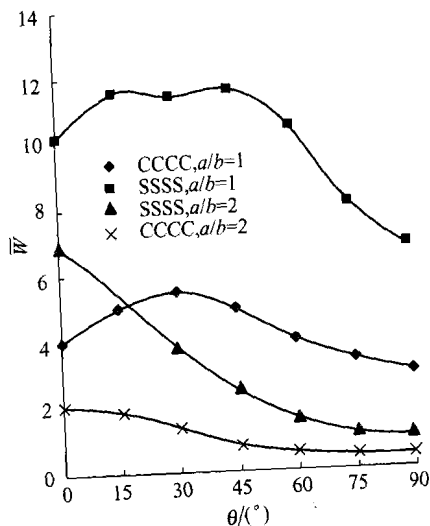


图 7-2 单层角铺设板中心无量纲挠度随铺设角变化  
( $b=1\text{m}$ ,  $h/b=0.1$ ,  $\beta=60^\circ$ ;  $\bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q a^3 b \sin \beta$ )

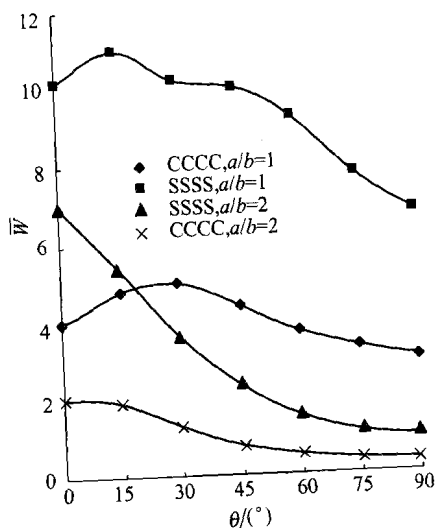


图 7-3 三层角铺设  $[\theta / - \theta / \theta]$  板中心无量纲挠度随铺设角变化  
( $b=1\text{m}$ ,  $h/b=0.1$ ,  $\beta=60^\circ$ ;  $\bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q a^3 b \sin \beta$ )

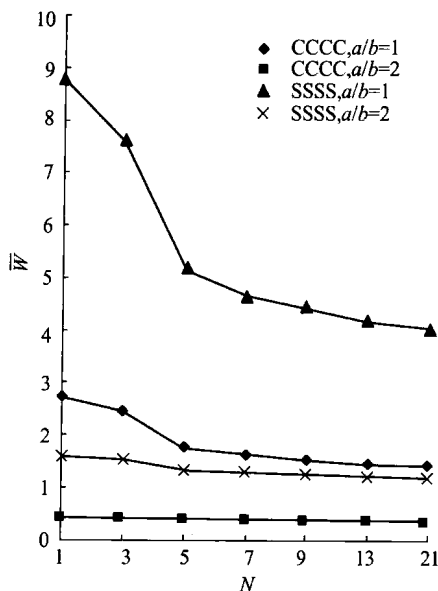


图 7-4 厚度固定的角铺设 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ 层合板中心无量纲挠度随铺设层数变化 ( $b=1\text{m}$ ,  $h/b=0.05$ ,  $\beta=50^\circ$ ;  $\bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q a^3 b \sin \beta$ )

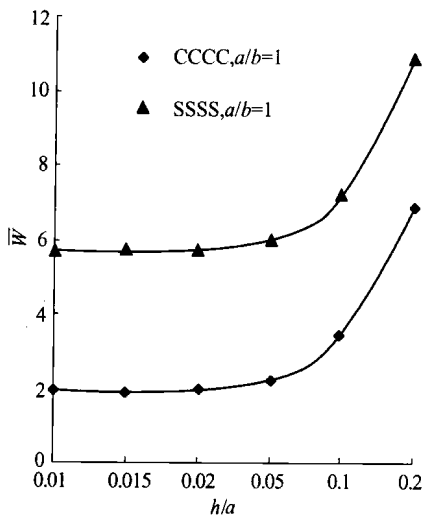


图 7-5  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ 层合板中心无量纲挠度随宽厚比变化 ( $b=1\text{m}$ ,  $\beta=60^\circ$ ;  $\bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q a^3 b \sin \beta$ )

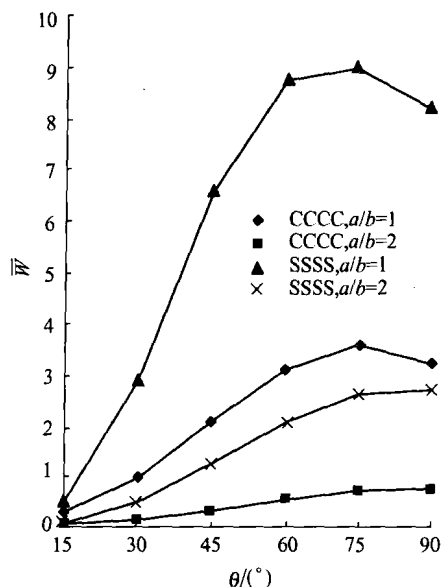


图 7-6  $[\theta \sim \theta/\theta]$  层合斜板中心无量纲挠度随斜角变化  
 $(b=1\text{m}, h/b=0.05, \theta=45^\circ; \bar{W}=10^3 w E_2 h^3 / q a^3 b \sin\beta)$

计算结果分析可得:

(1) 边界条件对斜板弯曲有重大的影响。其他参数相同的情况下, 四边简支的斜板的弯曲挠度比四边固支的斜板大很多。相应层合参数变化对不同边界的板结构影响也不同。

(2) 厚宽比  $h/a$  与剪切变形密切相关。 $h/a$  减小将降低剪切变形的影响。图 7-6 表明  $h/a$  小于 0.02 时, 剪切变形可以忽略。

(3) 板厚度固定, 层数从 1 增加到 21 时, 挠度降低。

(4) 斜角对斜形板影响很大。

## 7.4 基于一阶剪切变形理论的对称角铺设 复合材料斜形板振动问题解析

考虑基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料斜形板振动



问题,本节应用新型复级数法求解此类斜形板振动问题,并建立振动问题一般解析解。

基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料斜形板振动问题控制方程:

$$L_{11}\Phi_x + L_{12}\Phi_y + L_{13}w = 0 \quad (7-12. a)$$

$$L_{12}\Phi_x + L_{22}\Phi_y + L_{23}w = 0 \quad (7-12. b)$$

$$L_{13}\Phi_x + L_{23}\Phi_y + L_{33}w = 0 \quad (7-12. c)$$

式中:

$$L_{11} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{55}a^2$$

$$L_{12} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (D_{12} + D_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 D_{26} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{45}a^2$$

$$L_{13} = -A_{55}a \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{45}a\alpha \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$L_{22} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{44}a^2$$

$$L_{23} = -A_{45}a \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{44}a\alpha \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$L_{33} = \left( A_{55} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{45}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{44}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) - \rho a^2 \omega^2$$

$\omega$  为频率,  $\rho$  为板单位密度。

应用斜坐标变换式(7-2)和(7-3),方程(7-12)可变换为斜坐标下的控制方程(7-13):

$$LL_{11}\Phi_x + LL_{12}\Phi_y + LL_{13}w = 0 \quad (7-13. a)$$

$$LL_{12}\Phi_x + LL_{22}\Phi_y + LL_{23}w = 0 \quad (7-13. b)$$

$$LL_{13}\Phi_x + LL_{23}\Phi_y + LL_{33}w = 0 \quad (7-13. c)$$

式中:

$$\begin{aligned}
LL_{11} &= (D_{11} - 2D_{16}\tan\beta + D_{66}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
&\quad \frac{(2D_{16} - 2D_{66}\tan\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \alpha^2 \frac{D_{66}}{\sin^2\beta} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{55}a^2 \\
LL_{12} &= (D_{16} - (D_{12} + D_{66})\tan\beta + D_{26}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
&\quad \frac{((D_{12} + D_{66}) - 2D_{26}\tan\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \alpha^2 \frac{D_{26}}{\sin^2\beta} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{45}a^2 \\
LL_{13} &= (-A_{55} + A_{45}\tan\beta) a \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{45}}{\sin\beta} a \alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \\
LL_{22} &= (D_{66} - 2D_{26}\tan\beta + D_{22}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
&\quad \frac{(2D_{26} - 2D_{22}\tan\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{44}a^2 \\
LL_{23} &= -(A_{45} - A_{44}\tan\beta) a \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{44}}{\sin\beta} a \alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \\
LL_{33} &= \left( (A_{55} - 2A_{45}\tan\beta + A_{44}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(2A_{45} - 2A_{44}\tan\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{44}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) - \rho\omega^2 a^2
\end{aligned}$$

## 1. 齐次解

设方程(7-13)有如下齐次解:

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \\
\Phi_x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \\
\Phi_y &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(\eta) e^{i m \sigma \xi}
\end{aligned} \tag{7-14}$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$\begin{aligned} f_m(\eta) &= iGe^{im\sigma\eta r} \\ g_m(\eta) &= Ee^{im\sigma\eta r} \\ h_m(\eta) &= Fe^{im\sigma\eta r} \end{aligned} \quad (7-15)$$

式中:  $m$  为非 0 整数,  $G, E$  和  $F$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

为了使后续表述更加紧凑, 引入如下标注:

$$\begin{aligned} DL_{11} &= (D_{11} - 2D_{16}\tan\beta + D_{66}\tan^2\beta)(m\pi)^2 + \\ &\quad \frac{(2D_{16} - 2D_{66}\tan\beta)}{\sin\beta} r\alpha(m\pi)^2 + \alpha^2 r^2 \frac{D_{66}}{\sin^2\beta} (m\pi)^2 + A_{55}a^2 \\ DL_{12} &= (D_{16} - (D_{12} + D_{66})\tan\beta + D_{26}\tan^2\beta)(m\pi)^2 + \\ &\quad \frac{((D_{12} + D_{66}) - 2D_{26}\tan\beta)}{\sin\beta} r\alpha(m\pi)^2 + r^2\alpha^2 \frac{D_{26}}{\sin^2\beta} (m\pi)^2 + A_{45}a^2 \\ DL_{13} &= (-A_{55} + A_{45}\tan\beta)a(m\pi) - \frac{A_{45}}{\sin\beta} a\alpha(m\pi)r \\ DL_{22} &= (D_{66} - 2D_{26}\tan\beta + D_{22}\tan^2\beta)(m\pi)^2 + \\ &\quad \frac{(2D_{26} - 2D_{22}\tan\beta)}{\sin\beta} r\alpha(m\pi)^2 + \frac{D_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 (m\pi)^2 r^2 + A_{44}a^2 \\ DL_{23} &= -(A_{45} - A_{44}\tan\beta)a(m\pi) - \frac{A_{44}}{\sin\beta} a\alpha(m\pi)r \\ DL_{33} &= -((A_{55} - 2A_{45}\tan\beta + A_{44}\tan^2\beta)(m\pi)^2 + \\ &\quad \frac{(2A_{45} - 2A_{44}\tan\beta)}{\sin\beta} r\alpha(m\pi)^2 + \frac{A_{44}}{\sin^2\beta} \alpha^2 r^2 (m\pi)^2) - \rho\omega^2 a^2 \end{aligned}$$

将式(7-14)和(7-15)代入方程(7-13)可得方程组:

$$\begin{bmatrix} DL_{11} & DL_{12} & DL_{13} \\ DL_{12} & DL_{22} & DL_{23} \\ DL_{13} & DL_{23} & DL_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G \\ E \\ F \end{Bmatrix} = 0 \quad (7-16)$$

$$[DL_{kj}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} G \\ E \\ F \end{Bmatrix} = 0 \quad (7-17)$$

特征方程可由下式推导得出:  $\det[DL_{kj}]_{3 \times 3} = 0$ 。

特征方程为 6 阶代数多项式:

$$S_{60} + S_{51}\alpha r + S_{42}\alpha^2 r^2 + S_{33}\alpha^3 r^3 + S_{24}\alpha^4 r^4 + S_{15}\alpha^5 r^5 + S_{06}\alpha^6 r^6 = 0 \quad (7-18)$$

式中:  $r$  是  $m$  的函数,  $S_{60}, S_{51}, \dots, S_{06}$  具体形式复杂, 本节略。

式(7-18)有 6 个特征根, 可以标记为  $r_k, r_{k+1} (k=1, 3, 5)$ 。随着  $m$  和频率  $\omega$  组合的变化, 方程(4-20)特征根可能是成对的共轭复数 ( $r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k$ ), 或者是成对的实数根 ( $r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1}$ )。采取类似的步骤, 可得  $w, \Phi_x, \Phi_y$  齐次解:

$$\begin{aligned} (\Phi_x, \Phi_y, w) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \end{aligned} \quad (7-19)$$

考虑一般情况, 可设

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i n \sigma \xi} e^{i n \sigma \eta} \\ \Phi_y &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i n \sigma \xi} e^{i n \sigma \eta} \\ w &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \sigma \xi} e^{i n \sigma \eta} \end{aligned} \quad (7-20)$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

类似地, 可得另一个特征方程(7-21)、6 个特征根  $s_k, s_{k+1} (k=1, 3, 5)$ :

$$SX_{60}s^6 + SX_{51}s^5\alpha + SX_{42}s^4\alpha^2 + SX_{33}s^3\alpha^3 + SX_{24}s^2\alpha^4 + \\ SX_{15}s\alpha^5 + SX_{06}\alpha^6 = 0 \quad (7-21)$$

式中:  $SX_{60}, SX_{51}, \dots, SX_{06}$  具体形式复杂, 本节略。

采取类似的步骤, 可得另一组  $w, \Phi_x, \Phi_y$  齐次解:

$$(\Phi_x^*, \Phi_y^*, w^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} \quad (7-22)$$

$E_{jkm}, F_{jkm}$  和  $G_{jkm}$  之间的关系矩阵可采用上一章类似方法得到。同样方法也可得到  $O_{4kn}, P_{4kn}$  和  $Q_{4kn}$  之间的关系矩阵。

## 2. 补充解

引入势函数  $\Phi$ , 引进微分算子  $D_0$ , 它是以算子  $L_{ij}$  组成得  $3 \times 3$  行列式, 并令  $D_{kl}(k, l=1, 2, 3)$  表示给该行列式的代数余子式。使

$$\Phi_x = (LL_{12}LL_{23} - LL_{13}LL_{22})\Phi \\ \Phi_y = (LL_{13}LL_{12} - LL_{23}LL_{11})\Phi \\ w = (LL_{11}LL_{22} - LL_{12}LL_{12})\Phi \quad (7-23)$$

将式(7-23)代入方程(7-13)可得

$$(LL_{11}LL_{22}LL_{33} - LL_{12}LL_{12}LL_{33} - LL_{23}LL_{23}LL_{11} + \\ LL_{13}LL_{12}LL_{23} + LL_{23}LL_{13}LL_{12} - LL_{13}LL_{13}LL_{22})\Phi = 0 \quad (7-24)$$

展开后可得:

$$SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\ SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + SS_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} +$$

$$SS_{00}\Phi = 0 \quad (7-25)$$

式中:  $SS_{60}, SS_{51}, \dots, SS_{00}$  的表达式复杂, 具体形式略去。

采取与上一章类似的方法, 可以求得  $\Phi$  补充解:

$$\Phi^{**} = \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) \quad (7-26)$$

式中:  $(f_{xk}, f_{xk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, k=1, 3, 5)$  为待定常数。

$\tau_k, \tau_{k+1} (k=1, 3, 5)$  是方程(7-27)的根:

$$SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + SS_{02} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + SS_{00} \Phi = 0 \quad (7-27)$$

$h_k, h_{k+1} (k=1, 3, 5)$  是方程(7-28)的根:

$$SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{20} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + SS_{00} \Phi = 0 \quad (7-28)$$

$w^{**}, \Phi_x^{**}, \Phi_y^{**}$  的补充解可以通过式(7-23)求得。

### 3. 基于一阶剪切变形理论的对称角铺设复合材料斜形板振动问题一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$w =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + w^{**} \end{aligned} \quad (7-29)$$

$$\Phi_x =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (Z_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (Z_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (Z_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (Z_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (T_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (T_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (T_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (T_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \Phi_x^{**}
\end{aligned}$$

(7 - 30)

$\Phi_y =$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (R_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{1km} (R_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (R_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} G_{2km} (R_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (S_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{1kn} (S_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (S_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) -
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5} Q_{2kn} (S_{41k} \Psi_k(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \Phi_y^{**} \quad (7-31)$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5)$  和补充解  $(f_{xk}, f_{xk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, k=1, 3, 5)$  等 12 个待定常数都是未知常数。

实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (7-29) (7-30) (7-31) 共有  $12M+12$  个未知数 ( $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5)$  和  $(f_{xk}, f_{xk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, k=1, 3, 5)$ )。对于斜形板振动问题, 共有 12 个独立的边界条件。将解析解代入 12 个边界条件中, 形成 12 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数, 可以得到  $12M$  个线性代数方程; 在四个角点  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ , 根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立  $12M+12$  个线性方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \quad (7-32)$$

式中:  $K$  为  $(8M+12) \times (8M+12)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{13M}, G_{23M}, Q_{13M}, Q_{23M}, f_{x1}, f_{x2}, f_{y5}, f_{y6}\}$$

当方程 (7-32) 有异于零的解 (即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 2)$  和  $f_{xk}, f_{xk+1}, f_{yk}, f_{yk+1} (k=1, 3, 5)$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  即为所求频率。



## 第 8 章 各向异性矩形板平面应力问题 一般解析解

各向异性平面应力问题控制方程组存在位移关于坐标的奇次偏导数,而线性偏微分方程边值问题一直缺乏解析解法,这样各向异性平面应力问题一直不能解析求解。而矩形板平面应力问题是结构工程常见问题。本书运用新复级数法建立了各向异性平面问题的一般解析解,并以此阐述新复级数法求解线性偏微分方程边值问题具体过程,同时进行数值计算验证了所得到一般解析解的收敛性和稳定性。

### 8.1 平面应力问题的位移型方程

各向异性平面应力问题控制方程组为

$$\begin{cases} L_{11}U + L_{12}V = 0 \\ L_{12}U + L_{22}V = 0 \end{cases} \quad (8-1)$$

算子  $L_{ij}$  具体形式为

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (A_{12} + A_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

书中引入了以下无量纲量:  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $\eta = \frac{y}{b}$ ,  $U = \frac{u}{a}$ ,  $V = \frac{v}{a}$ ,  $\alpha = \frac{a}{b}$

式中:  $A_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, 6)$  为面内刚度系数, 具体形式参见文献 [85],  $a, b$  为矩形板长度、宽度。

各向异性矩形薄板平面问题求解可归结为求解偏微分方程组 (8-1) 在矩形板平面应力边界条件下边值问题。

## 8.2 一般解析解的建立

本书一般解析解由通解、补充解组成。

### 1. 通解的推导

本书采用位移法求解, 设

$$\begin{cases} u = \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{im\sigma\xi} e^{im\sigma\eta r} \\ v = \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{im\sigma\xi} e^{im\sigma\eta r} \end{cases} \quad (8-2)$$

式中:  $i$ ——虚数单位;

$m$ ——整数;

$r$ ——特征根。

将式 (8-2) 代入式 (8-1), 当  $m$  不为 0 时, 可推得有关  $r$  的四次特征代数方程

$$S_{40} + S_{31}r + S_{22}r^2 + S_{13}r^3 + S_{04}r^4 = 0 \quad (8-3)$$

式中:

$$S_{40} = A_{11}A_{66} - A_{16}A_{16}, \quad S_{31} = 2(A_{11}A_{26} - A_{16}A_{12})\alpha,$$

$$S_{22} = (-A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66} + A_{11}A_{22} + 2A_{16}A_{26})\alpha^2$$

$$S_{13} = 2(A_{16}A_{22} - A_{12}A_{26})\alpha^3, \quad S_{04} = (A_{66}A_{22} - A_{26}A_{26})\alpha^4$$

对于各向异性复合材料板, 式 (8-3) 有两对共轭复根  $a_k \pm b_k i$  ( $k=1, 2$ )。

采用本书第 3 章中类似的步骤, 可以推得的实数形式级数通解  $U, V$  合写如下:

$$\begin{aligned}
(U, V) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (E_{1km}, F_{1km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (E_{2km}, F_{2km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (E_{3km}, F_{3km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (E_{4km}, F_{4km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k}
\end{aligned} \quad (8-4)$$

从基本解的独立性出发,可得到  $E_{jkm}, F_{jkm} (j, k = 1, 2)$  之间的关系式。为简便起见,将  $U, V$  代入式(8-1)中任一式,可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & Z_{21k} & Z_{13k} & Z_{23k} \\ Z_{21k} & Z_{11k} & Z_{23k} & Z_{13k} \\ Z_{31k} & Z_{41k} & Z_{33k} & Z_{43k} \\ Z_{41k} & Z_{31k} & Z_{43k} & Z_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

本书又设

$$\begin{cases} U = \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i \pi \omega \xi} e^{i \pi \sigma \eta} \\ V = \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i \pi \omega \xi} e^{i \pi \sigma \eta} \end{cases} \quad (8-6)$$

与上面介绍类似,可得有关  $s$  的特征方程式(8-7)、不等共轭虚根  $c_k \pm d_k i (k=1, 2)$  和关系矩阵:

$$S_{40}s^4 + S_{31}s^3 + S_{22}s^2 + S_{13}s + S_{04} = 0 \quad (8-7)$$

$$\begin{bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & T_{21k} & T_{13k} & T_{23k} \\ T_{21k} & T_{11k} & T_{23k} & T_{13k} \\ T_{31k} & T_{41k} & T_{33k} & T_{43k} \\ T_{41k} & T_{31k} & T_{43k} & T_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{bmatrix} \quad (8-8)$$

同样可得对应的实数形式级数通解  $U^*$ 、 $V^*$  合写如下:

$$\begin{aligned}
 (U^*, V^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (O_{1kn}, P_{1kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (O_{2kn}, P_{2kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (O_{3kn}, P_{3kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 (O_{4kn}, P_{4kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k}
 \end{aligned} \quad (8-9)$$

从线性偏微分方程解得可迭加性出发,在式(8-4)和式(8-9)基础上补充多项式,可得一般解析解:

$$\begin{aligned}
 V = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 F_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 F_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 P_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 P_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & t_6 + t_7 (\xi - 0.5) + t_8 (\eta - 0.5) + t_9 (\xi - 0.5)^2 + t_{10} (\eta - 0.5)^2
 \end{aligned} \quad (8-10)$$

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 F_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
 & \left. Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 F_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 F_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 F_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 P_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 P_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 P_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 P_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) +
\end{aligned}$$

$$t_1 + t_2 (\xi - 0.5) + t_3 (\eta - 0.5) + t_4 (\xi - 0.5)^2 + t_5 (\eta - 0.5)^2$$

(8 - 11)

## 2. 求解模式

在实际计算中,  $m$  不可能取无穷大, 设  $m$  最大取  $M$ , 这样一般解析解式(8-10)和式(8-11)共有  $8M+10$  个未知数。对于矩形板, 每边有两个边界条件, 共有 8 个边界条件。将一般解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项余弦级数。根据余弦级数的正交性, 可以得到  $8M+8$  个线性代数方程。一般解析解代入式(8-1), 可得有关补充项的两个方程, 这样共建立  $8M+10$  个方程, 可以求解  $8M+10$  个未知数, 各向异性平面问题得解。

## 8.3 数值验证部分

由于从已有文献无法查得各向异性平面应力计算结果, 为了考查本书解的收敛性和稳定性, 针对 15 层 ( $-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ ), 对称角铺设矩形板在纵向拉伸载荷作用下的平面应力问题进行计算。

边界条件为

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad \xi = 1, \quad U = 10^{-4}, \quad V = 0 \\ \eta = 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad \eta = 1, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned}$$

材料常数为

$$E_1 = 204\text{GPa}, \quad E_2 = 18.5\text{GPa}, \quad G_{12} = 5.79\text{GPa}, \quad \nu_{12} = 0.23$$

几何参数为  $a = b = 1\text{m}, h = 0.01\text{m}$

计算时  $M$  选为 40, 表 8-1 和表 8-2 给出矩形板位移分布情况, 表 8-3 反映了  $M$  增加时本书解的变化趋势。

表 8-1 矩形板内  $10^4 U$  分布情况

$y \backslash x$	0.0	0.2	0.5	0.8	1.0
0.0	0.000	0.338	0.505	0.675	1.000
0.2	0.000	0.165	0.508	0.839	1.000

(续)

$y \backslash x$	0.0	0.2	0.5	0.8	1.0
0.5	0.000	0.095	0.500	0.905	1.000
0.8	0.000	0.161	0.492	0.835	1.000
1.0	0.000	0.325	0.495	0.663	1.000

表 8-2 矩形板内  $10^4 V$  分布情况

$y \backslash x$	0.0	0.2	0.5	0.8	1.0
0.0	0.000	0.295	0.399	0.284	0.000
0.2	0.000	0.121	0.292	0.121	0.000
0.5	0.000	-0.004	0.000	0.004	0.000
0.8	0.000	-0.121	-0.292	-0.121	0.000
1.0	0.000	-0.284	-0.399	-0.295	0.000

表 8-3 板内位移  $U(0.5, 0)$  随  $M$  变化趋势

$M$	4	6	10	20	40
$10^4 U$	0.506	0.505	0.505	0.505	0.505

从表 8-1 和表 8-2 可看出,本书的解可较好地满足边界条件,具有较好的收敛性。表 7-3 显示,当  $M$  增大时,解数值保持稳定。

注:考虑更一般情况,引入势函数  $\Phi$ ,引进微分算子  $D_0$ ,它是以算子  $L_y$  组成得  $2 \times 2$  行列式,使

$$u = L_{22}\Phi, v = -L_{12}\Phi \quad (8-12)$$

依照线性代数理论,基本微分方程可以写成

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{12})\Phi = 0 \quad (8-13)$$

可选取

$$\begin{aligned} \Phi = & t_{11}(\xi - 0.5)^5 + t_{12}(\eta - 0.5)^5 + t_{13}((\xi - 0.5)^4(\eta - 0.5) + \\ & (\xi - 0.5)(\eta - 0.5)^4) + t_{14}((\xi - 0.5)^3(\eta - 0.5)^2 + \\ & (\xi - 0.5)^2(\eta - 0.5)^3) \end{aligned}$$

其中为  $t_{11} \sim t_{14}$  为待定补充项常数。

为满足式(8-13),将式(8-14)代入方程(8.13),可得2个方程,这样式(8-14)只有2个独立常数。根据式(8-12),再叠加多项式  $(\xi - 0.5)(\eta - 0.5)$  可得有4个独立常数的一组补充解:

$$u^{**} = L_{22}\Phi + t_{15}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5),$$

$$v^{**} = L_{12}\Phi + t_{16}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5),$$

将  $u^{**}$ 、 $v^{**}$  分别叠加到式(8-10)和(8-11),可以得到  $u$ 、 $v$  新的解析解。

设实际计算中,设  $m$ 、 $n$  最大取  $M$ ,新的一般解析解共有  $8M + 14$  个未知数。对于矩形板,每边有两个边界条件,共有8个边界条件。将  $u$ 、 $v$  新的一般解析解代入8个边界条件中,形成8个方程,将边界法向载荷或位移展成  $M$  项正弦级数,将边界切向载荷或位移展成  $(M + 1)$  项余弦级数。根据正弦、余弦级数的正交性,可以得到  $8M + 4$  个线性代数方程。每个角点的法向载荷或位移有2个角点条件,这样可建立8个方程。将  $u$ 、 $v$  新解析解代入(8-1),又可得有关补充项的两个方程,这样共建立  $8M + 14$  个方程,可以求解  $8M + 14$  个未知数,各向异性平面问题得解。自然,引入斜坐标后,本章方法同样可以用来处理斜形域的平面应力问题。



## 第9章 任意铺设复合材料 矩形薄扁壳静力响应 一般解析解

由于复合材料具有比强度和比刚度高,可设计性强等许多优异特性,在许多结构工程中复合材料壳体一般可做得很薄,这样实际工程中的许多问题可以按经典板壳理论计算分析,以3个位移分量和作为未知数求解。扁壳是指壳体的矢高和被覆盖的底面最短边之比小于0.2的壳体,双曲扁壳广泛地应用于工程结构,扁壳横向弯曲解析研究有重要工程理论应用价值。但很难发现可以处理任意边界条件的各向同性扁壳横向弯曲一般解析解,纳维叶解、利维解曾用来求解简支各向同性扁壳横向弯曲。而任意铺设复合材料扁壳横向弯曲解析求解一直无法进行。任意铺设形式板壳存在拉弯之间、拉剪之间和弯扭之间一系列耦合效应,这给层合扁壳的力学问题的解析处理带来很大困难。本章运用新复级数法建立了任意铺设复合材料矩形薄扁壳横向弯曲的一般解析解,验证了所得到一般解析解的收敛性和稳定性。

### 9.1 扁壳弯曲问题的位移型方程

扁壳坐标示意图如图9-1所示。

矩形扁壳有以下基本关系式。

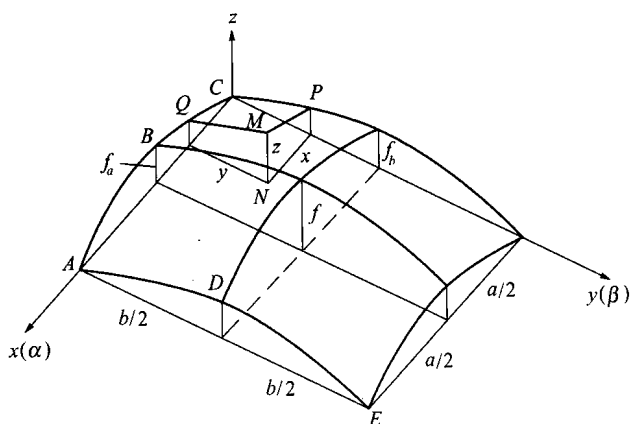


图 9-1 扁壳坐标示意图

# 1. 几何关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + f_x w \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + f_y w \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (9-1)$$

式中:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ ——面内应变;

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ ——扭率;

$f_x, f_y$ ——双曲扁壳的曲率。

## 2. 物理关系

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9-2)$$

## 3. 平衡方程

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ & B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\ & f_x \left( A_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + f_y \left( A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ & B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\ & f_x \left( A_{26} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + f_y \left( A_{16} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ & - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \\ & B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ & 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ & (f_x^2 A_{22} + f_y^2 A_{11} + 2f_x f_y) w - 2(f_x B_{11} + f_y B_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \end{aligned}$$

$$4(f_x B_{16} + f_y B_{26}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 2(f_y B_{22} + f_x B_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q \quad (9-3)$$

其中  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i=1, 2 \quad j=1, 2, 6)$  为面内刚度系数、耦合刚度系数、弯曲刚度系数, 具体形式参见文献[85]。

引入以下无量纲量:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad U = \frac{u}{a}, \quad V = \frac{v}{a}, \quad W = \frac{w}{a}, \quad p = \frac{q}{a^2}$$

这样式(9-3)可改写如下:

$$\begin{cases} L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W = 0 \\ L_{12}U + L_{22}V + L_{23}W = 0 \\ L_{13}U + L_{23}V + L_{33}W = p \end{cases} \quad (9-4)$$

式中:

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (A_{12} + A_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ L_{13} &= - \left( B_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3B_{16}\alpha \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. B_{26}\alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{a} + f_x a \left( A_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{26}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + f_y a \left( A_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{16}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ L_{23} &= - \left( B_{16} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3B_{26}\alpha \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. B_{22}\alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{a} + f_x a \left( A_{26} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{22}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + f_y a \left( A_{16} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{12}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ L_{33} &= \frac{1}{a^2} \left( D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \right. \end{aligned}$$

$$4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \Big) + (f_x^2 A_{22} + f_y^2 A_{11} + 2f_x f_y A_{12}) a^2$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

任意铺设复合材料矩形薄扁壳横向弯曲问题求解可归结为求解偏微分方程组(9-4)在横向弯曲薄扁壳边界条件下边值问题。

## 9.2 扁壳弯曲一般解析解的建立

本书一般解析解由通解、补充解和特解组成。

### 1. 通解的推导

本书采用位移法求解,设

$$\begin{cases} U = \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{im\sigma\xi} e^{im\sigma\eta r} \\ V = \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{im\sigma\xi} e^{im\sigma\eta r} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} G e^{im\sigma\xi} e^{im\sigma\eta r} \end{cases} \quad (9-5)$$

式中:  $i$ ——虚数单位;

$m$ ——整数;

$r$ ——特征根。

将式(9-5)代入式(9-4),当  $m$  不为 0 时,可推得有关  $r$  的八次特征代数方程

$$\begin{aligned} & S_{80} + S_{71}\alpha r + S_{62}\alpha^2 r^2 + S_{53}\alpha^3 r^3 + S_{44}\alpha^4 r^4 + S_{35}\alpha^5 r^5 + S_{26}\alpha^6 r^6 + \\ & S_{17}\alpha^7 r^7 + S_{08}\alpha^8 r^8 + (S_{40} + S_{31}\alpha r + S_{22}\alpha^2 r^2 + S_{13}\alpha^3 r^3 + \\ & S_{04}\alpha^4 r^4)/V_{M4} = 0 \end{aligned} \quad (9-6)$$

式中:  $S_{kl}$  具体形式略,  $V_{M4} = (m\pi)^4$

对于一般铺设的复合材料板,式(8-6)有 4 对共轭复根  $a_k \pm b_k i$

( $k=1,2,3,4$ )。

采用本书第3章类似的步骤,可以推得的实数形式级数通解  $U$ 、 $V$ 、 $W$  合写如下:

$$\begin{aligned}
 (U, V, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k}
 \end{aligned} \quad (9-7)$$

将式(9-7)代入式(9-2)中的任意两式,从基本解的独立性出发,可得到  $E_{ijm} F_{ijm} G_{ijm}$  ( $i, j=1, 2, 3, 4$ ) 之间的关系式。这样可得8组线性方程,用计算机可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{Bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{Bmatrix} \quad (9-8)$$

当  $m$  为0时,设

$$\begin{cases} U = U_y e^{i\eta} \\ V = V_y e^{i\eta} \\ W = W_y e^{i\eta} \end{cases} \quad (9-9)$$

将式(9-9)代入式(9-4),可得四阶常微分控制方程及其特征根  $\pm a_0 \pm ib_0$ 。

又设

$$\begin{cases} U = \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i\alpha s \xi} e^{i\alpha \eta} \\ V = \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i\alpha s \xi} e^{i\alpha \eta} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i\alpha s \xi} e^{i\alpha \eta} \end{cases} \quad (9-10)$$

与上面介绍类似,可得有关  $s$  的特征方程式(9-11)、四对不等共轭虚根  $c_k \pm id_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) 和关系矩阵:

$$\begin{aligned} & S_{80}s^8 + S_{71}\alpha s^7 + S_{62}\alpha^2 s^6 + S_{53}\alpha^3 s^5 + S_{44}\alpha^4 s^4 + S_{35}\alpha^5 s^3 + S_{26}\alpha^6 s^2 + \\ & S_{17}\alpha^7 s + S_{08}\alpha^8 (S_{40}s^4 + S_{31}\alpha s^3 + S_{22}\alpha^2 s^2 + S_{13}\alpha^3 s + S_{04}\alpha^4)/V_{M4} = 0 \end{aligned} \quad (9-11)$$

$$\begin{Bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{Bmatrix} \quad (9-12)$$

同样可得对应的实数形式级数通解  $U^*$ 、 $V^*$ 、 $W^*$  合写如下:

$$(U^*, V^*, W^*) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \end{aligned} \quad (9-13)$$

当  $n$  为 0 时, 设

$$U = U_x e^{\xi}, \quad V = V_x e^{\xi}, \quad W = W_x e^{\xi}$$

将上式代入式(9-4), 可得四阶常微分控制方程及其特征根  $\pm c_0 \pm id_0$ 。从线性偏微分方程解得可叠加性出发, 在式(9-7)和式(9-13)基础上补充多项式及特解, 可得一般解析解:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & t_1 + t_2 (\xi - 0.5) + t_3 (\eta - 0.5) + \\ & W_{y1} \frac{\sinh(\eta a_0) \sin(b_0 \eta)}{\sinh(a_0) \sin(b_0)} + W_{y2} \frac{\sinh(1 - \eta) a_0}{\sinh(a_0) \sin(b_0)} \sin b_0 (1 - \eta) + \\ & W_{y3} \frac{\sinh(1 - \eta) a_0 \sin(b_0 \eta)}{\sinh(a_0) \sin(b_0)} + W_{y4} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh(a_0) \sin(b_0)} \sin b_0 (1 - \eta) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& W_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0) \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + W_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0 (1 - \xi) + \\
& W_{x3} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0 \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + W_{x4} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0 (1 - \xi) + W^{**}
\end{aligned}
\tag{9 - 14}$$

$$\begin{aligned}
U = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& t_4 + t_5 (\xi - 0.5) + t_6 (\eta - 0.5) + t_7 (\xi - 0.5)^2 + t_8 (\eta - 0.5)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_{y1} \frac{\sinh(\eta a_0) \sin(b_0 \eta)}{\sinh a_0 \sin b_0} + U_{y2} \frac{\sinh(1 - \eta) a_0}{\sinh a_0 \sin b_0} \sin b_0 (1 - \eta) + \\
& U_{y3} \frac{\sinh(1 - \eta) a_0 \sin(b_0 \eta)}{\sinh a_0 \sin b_0} + U_{y4} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh a_0 \sin b_0} \sin b_0 (1 - \eta) + \\
& U_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0) \sin(d_0 \xi)}{\sinh c_0 \sin d_0} + U_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0}{\sinh c_0 \sin d_0} \sin d_0 (1 - \xi) + \\
& U_{x3} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0 \sin(d_0 \xi)}{\sinh c_0 \sin d_0} + U_{x4} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh c_0 \sin d_0} \sin d_0 (1 - \xi) + U^{**}
\end{aligned}$$

(9 - 15)

$$\begin{aligned}
V = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) +
\end{aligned}$$

$$t_9 + t_{10}(\xi - 0.5) + t_{11}(\eta - 0.5) + t_{12}(\xi - 0.5)^2 + t_{13}(\eta - 0.5)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& V_{y1} \frac{\sinh(\eta a_0) \sin(b_0 \eta)}{\sinh a_0 \sin b_0} + V_{y2} \frac{\sinh(1 - \eta) a_0}{\sinh a_0 \sin b_0} \sin b_0 (1 - \eta) + \\
& V_{y3} \frac{\sinh(1 - \eta) a_0 \sin(b_0 \eta)}{\sinh a_0 \sin b_0} + V_{y4} \frac{\sinh(\eta a_0)}{\sinh a_0 \sin b_0} \sin b_0 (1 - \eta) + \\
& V_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0) \sin(d_0 \xi)}{\sinh c_0 \sin d_0} + V_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0}{\sinh c_0 \sin d_0} \sin d_0 (1 - \xi) + \\
& V_{x3} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0 \sin(d_0 \xi)}{\sinh c_0 \sin d_0} + V_{x4} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh c_0 \sin d_0} \sin d_0 (1 - \xi) + V^{**}
\end{aligned} \tag{9-16}$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于横向弯曲问题,本书引入势函数  $\Phi$ ,引进微分算子  $D_0$ ,它是以算子  $L_{ij}$  组成得  $3 \times 3$  行列式,并令  $D_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) 表示给该行列式的代数余子式。使

$$U = D_{31} \Phi \quad V = D_{32} \Phi \quad W = D_{33} \Phi \tag{9-17}$$

依照线性代数理论,基本微分方程可以写成

$$D_0 \Phi = p \tag{9-18}$$

展开为

$$\begin{aligned}
& SS_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta} + SS_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} + SS_{53} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^3} + SS_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} + \\
& SS_{35} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^6} + SS_{17} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} + \\
& SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = P
\end{aligned} \tag{9-19}$$

对于均布载荷,本书选取

$$\Phi = \frac{p}{52} \left( \frac{(\xi - 0.5)^4}{SS_{40}} + \frac{(\xi - 0.5)^2 (\eta - 0.5)^2}{SS_{22}} + \frac{(\eta - 0.5)^4}{SS_{04}} \right) \tag{9-20}$$

从而可推出各位移特解。

### 3. 求解模式

将三个位移一般解析解中的多项式、梁函数代入三个控制方程, 可得 21 个独立方程。在实际计算中,  $mn$  不可能取无穷大, 设最大取  $M$ , 这样一般解析解式(9-14)、式(9-15)和式(9-16)共有  $16M+16$  个未知数。对于任意铺设矩形扁壳, 每边有四个边界条件, 共有 16 个边界条件。将一般解析解代入 16 个边界条件中, 形成 16 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项余弦级数。根据余弦级数的正交性, 可以得到  $16M+16$  个线性代数方程, 可以求解  $16M+16$  个未知数, 横向弯曲问题得解。

## 9.3 扁壳解析解数值验证部分

为了考查本书解的收敛性和稳定性, 针对两层  $[45/0]_T$  铺设四边固定固支矩形双曲扁壳在均布载荷作用下的横向弯曲进行计算:

$$\xi = 0, 1, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0$$

边界条件为

$$\eta = 0, 1, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0$$

材料常数为  $E_1 = 204 \text{ GPa}$   $E_2 = 18.5 \text{ GPa}$   $G_{12} = 5.76 \text{ GPa}$   $\nu_{12} = 0.23$   
几何、载荷参数为  $a = b = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.01 \text{ m}$ ,  $f_x = 0.1$ ,  $f_y = 0.1$ ,  $P = 10^4 \text{ N/m}^2$

类似文献[100]中有关对称性分析, 从任意铺设矩形扁壳材料、边界条件和载荷对称情况可以推得: 当任意铺设矩形扁壳材料、边界条件和载荷呈中心对称时, 扁壳挠度呈中心对称, 而面内位移  $U$ 、 $V$  呈反对称, 具体表示为

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) &= W(1 - \xi, 1 - \eta) \\ U(\xi, \eta) &= -U(1 - \xi, 1 - \eta) \\ V(\xi, \eta) &= -V(1 - \xi, 1 - \eta) \end{aligned}$$

在本书数值计算中引入这一结论,从而将待定系数缩减为  $8M + 8$  个。

为了显示任意铺设层合扁壳位移  $W$ 、 $U$ 、 $V$  总体分布情况,下面给出表 9-1、表 9-2 和表 9-3。计算时取  $M$  为 40。

表 9-1  $M=40$  挠度  $10^3 W$  分布

$x/a \backslash y/b$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	0.00	0.218	0.409	0.426	0.392	0.194	0.00
0.5	0.00	0.314	0.667	0.718	0.667	0.314	0.00
0.8	0.00	0.194	0.392	0.426	0.409	0.218	0.00
1.0	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00

表 9-2  $M=40$  水平位移  $10^4 U$  分布

$x/a \backslash y/b$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.054	0.015	-0.013	-0.039	-0.060	0.000
0.5	0.000	0.095	0.051	0.000	-0.051	-0.095	0.000
0.8	0.000	0.060	0.039	0.013	-0.015	-0.054	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 9-3  $M=40$  扁壳纵向位移  $V \times 10^4$  分布

$x/a \backslash y/b$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	-0.002	0.005	0.014	0.027	0.057	0.000
0.5	0.000	-0.060	-0.021	0.000	0.021	0.060	0.000
0.8	0.000	-0.057	-0.027	-0.014	-0.005	0.002	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

从表 9-1、表 9-2 和表 9-3 可看出,本书解可较好地满足边界条件,具有较好的收敛性;从表 9-4 发现,当  $M$  增大时,解数值保持稳定;计算中发现,对于不同的材料、边界条件及铺层方式,所需计算项数需经具体计算确定,一般  $M$  取为 30 已可得到较满意的结果。

表 9-4  $M$  变化时扁壳中心挠度  $w$

$N$	6	12	18	30	36	40
$w \times 10^3$	0.7186	0.7181	0.7180	0.7180	0.7180	0.7180

在实际工艺制作中曲率  $f_x$ 、 $f_y$  较低的扁壳已接近平板结构,在力学计算也应反映这一事实。本书针对  $[0/\theta]_T$  层合板、扁壳,逐渐减小曲率  $f_x$ 、 $f_y$ ,将所得板( $f_x=f_y=0$ )中心挠度的计算结果与  $[0/\theta]_T$  铺设扁壳相应结果比较,结果反映在表 9-5 中。计算时  $f_x=f_y$ ,  $M=20$ 。

表 9-5  $[0/\theta]_T$  层合板与  $[0/\theta]_T$  层合扁壳中心挠度计算结果比较

$\begin{matrix} w \\ \theta \end{matrix} \begin{matrix} f_x \\ \end{matrix}$	0.00 *	0.01	0.001	0.0001
45	0.0031830	0.0030150	0.0030858	0.0030845
15	0.0019092	0.0018966	0.0019312	0.0019311
0.1	0.0015939	0.0015660	0.0015938	0.0015938
注: * 解答依据第 3 章各向异性薄板一般解析解计算而得				

从表 9-5 可发现对于小曲率扁壳的计算结果与相应层合板结果相差不多,当  $\theta$  逼近 0 时,表中显示的层合扁壳位移量已逼近相应层合板结果,这从另一侧面验证了本书解的正确性。

本章运用复级数+余弦级数法首次建立任意铺设复合材料矩形扁壳横向弯曲一般解析解,经过数值计算表明本书解收敛稳定,可以用来解析分析任意铺设复合材料矩形扁壳横向弯曲问题。

## 第 10 章 任意铺设复合材料 矩形薄板静力响应解析

任意铺设层合板的各向异性、呈层性将引起拉弯之间、拉剪之间和弯扭之间一系列耦合效应,而对称铺设层合板只独立地存在拉剪耦合或弯扭耦合效应。显然相对对称角铺设层合板,任意铺设层合板分析更为复杂。从解析求解来看,任意铺设层合板控制方程为偏微分方程组,未知函数为 3 个,而对称角铺设问题控制方程为单一偏微分方程,未知函数为 1 个,即为挠度函数。量变产生了质变,相对对称角铺设层合板,任意铺设层合板解析求解要困难得多,任意铺设层合板解析求解一直没有实现。对任意铺设层合结构力学特性认识也有限,在实际设计中亦难以掌握,这样各国设计规范一般规定尽量采用对称铺层设计。在对任意铺设结构力学特性充分研究基础上,采用任意铺设达成优良设计,不仅是可能,也是现实的,如在飞机气动弹性剪裁设计就是有意采用非均衡非对称的一般层合板,在美国前掠翼飞机 X-29、俄罗斯前掠翼飞机 S-37 设计中非对称层合板应用就收到应有的效果。在工程中,复合材料多制成薄板壳。采用经典理论求解任意铺设层合板可应用范围亦很广。本章运用新复级数法建立了任意铺设复合材料矩形薄板静力问题的一般解析解。在进行数值计算验证了所得到弯曲一般解析解的收敛性、稳定性以后,研究了任意铺设层合板的铺层对称性,同时结合四边简支固定边界、四边固支固定边界进行分析计算。



## 10.1 任意铺设复合材料矩形板弯曲问题的位移型方程

矩形板有以下基本关系式。

### 1. 几何关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \chi_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10-1)$$

### 2. 物理关系

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10-2)$$

### 3. 平衡方程

$$\begin{aligned} &A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ &A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\ &A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ &A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \\
& B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\
& 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p
\end{aligned} \tag{10-3}$$

式中:  $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ 、 $D_{ij}$  ( $i=1,2$   $j=1,2,6$ ) 为面内刚度系数、耦合, 刚度系数、弯曲刚度系数, 具体形式见参考文献[85]。

引入以下无量纲量:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad W = \frac{w}{a} \quad U = \frac{u}{a} \quad V = \frac{v}{a} \quad p = qa^2$$

式中:  $q$  为板横向载荷;  $a$ 、 $b$  为板长度、宽度。

这样方程组(10-3)可改写如下:

$$\begin{aligned}
L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W &= 0 \\
L_{12}U + L_{22}V + L_{23}W &= 0 \\
L_{13}U + L_{23}V + L_{33}W &= P
\end{aligned} \tag{10-4}$$

式中:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (A_{12} + A_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
L_{13} &= - \left( B_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3B_{16}\alpha \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + \right. \\
& \quad \left. B_{26}\alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

$$L_{23} = - \left( B_{16} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3B_{26}\alpha \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + B_{22}\alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{a}$$

$$L_{33} = \left( D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \frac{1}{a^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

任意铺设复合材料矩形薄板横向弯曲问题求解可归结为求解偏微分方程组(10-4)在横向弯曲矩形板边界条件下边值问题。

## 10.2 任意铺设矩形板弯曲一般解析解的建立

本节一般解析解由通解、补充解和特解组成。

### 1. 通解的推导

本节采用位移法求解,设

$$\begin{aligned} U &= \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ V &= \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ W &= \sum_{-\infty}^{\infty} G e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \end{aligned} \quad (10-5)$$

式中:  $i$  为虚数单位;  $m$  为整数;  $r$  为特征根。

将式(10-5)代入式(10-4),当  $m$  不为 0 时,可推得有关  $r$  的 8 次特征代数方程

$$S_{80} + S_{71}r + S_{62}r^2 + S_{53}r^3 + S_{44}r^4 + S_{35}r^5 +$$

$$S_{26}r^6 + S_{17}r^7 + S_{08}r^8 = 0 \quad (10-6)$$

式中  $S_{kl}$  形式复杂, 具体形式略。

对于一般铺设的复合材料板, 式(10-6)有四对共轭复根  $a_k \pm ib_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ )。

采用中类似的步骤, 可以推得的实数形式级数通解  $U, V, W$  合写如下:

$$\begin{aligned} (U, V, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \end{aligned} \quad (10-7)$$

从基本解的独立性出发, 可得到  $E_{ijm}$   $F_{ijm}$   $G_{ijm}$  ( $i, j=1, 2, 3, 4$ ) 之间的关系式。为简便起见, 将  $U, V, W$  代入式(10-7)中的任两式, 根据基本解独立性, 这样可得 8 组线性方程, 用计算机可简单地得到下面关系矩阵:

$$\begin{Bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{Bmatrix} \quad (10-8)$$

对于规则非对称正交铺设层合板、规则反对称层合板,上面关系矩阵不成立,解形式发生变化,另文给出相应解。

下面又设

$$\begin{aligned} U &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i\pi\omega\xi} e^{i\pi\omega\eta} \\ V &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i\pi\omega\xi} e^{i\pi\omega\eta} \\ W &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i\pi\omega\xi} e^{i\pi\omega\eta} \end{aligned} \quad (10-9)$$

与上文类似,可得有关  $s$  的特征方程(10-10)、四对不等共轭虚根  $c_k \pm id_k (k=1,2,3,4)$  和关系矩阵:

$$S_{80}s^8 + S_{71}s^7 + S_{62}s^6 + S_{53}s^5 + S_{44}s^4 + S_{35}s^3 + S_{26}s^2 + S_{17}s + S_{08} = 0 \quad (10-10)$$

$$\begin{Bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{Bmatrix} \quad (10-11)$$

同样可得对应的实数形式级数通解  $U^*$ 、 $V^*$ 、 $W^*$  合写如下:

$$\begin{aligned} (U^*, V^*, W^*) &= \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k}$$

(10 - 12)

从线性偏微分方程解得可叠加性出发,在式(10 - 7)和式(10 - 12)基础上补充多项式及特解,可得一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + a_{13} +$$

$$t_{14}(\xi - 0.5) + t_{15}(\eta - 0.5) + t_{16}(\xi - 0.5)^2 +$$

$$t_{17}(\eta - 0.5)^2 + t_{18}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + W^{**} \quad (10 - 13)$$

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \left. \right) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \left. \right) -$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& t_1 + t_2 (\xi - 0.5) + t_3 (\eta - 0.5) + t_4 (\xi - 0.5)^2 + \\
& t_5 (\eta - 0.5)^2 + t_6 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + U^{**} \quad (10 - 14)
\end{aligned}$$

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) -
\end{aligned}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\ \left. S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + a_7 + a_8 (\xi - 0.5) + \\ t_9 (\eta - 0.5) + t_{10} (\xi - 0.5)^2 + t_{11} (\eta - 0.5)^2 + \\ t_{12} (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + V^{**} \quad (10-15)$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于线性偏微分方程组, 由于其结构复杂性, 即使特解也较难寻求。对于横向弯曲问题, 此处引入势函数  $\Phi$ , 引进微分算子  $D_0$ , 它是以算子  $L_{ij}$  组成得  $3 \times 3$  行列式, 并令  $D_{kl} (k, l = 1, 2, 3)$  表示给该行列式的代数余子式。使

$$U = D_{31} \Phi \quad V = D_{32} \Phi \quad W = D_{33} \Phi \quad (10-16)$$

具体写为

$$U = u_1 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} + u_2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta} + u_3 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} + u_4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} + u_5 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^4} + u_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} \\ V = v_1 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} + v_2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta} + v_3 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} + v_4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} + v_5 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^4} + v_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} \\ W = w_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + w_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + w_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + w_4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + w_5 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} \quad (10-17)$$

式中:  $u_k, v_k (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6), w_l (l = 1, 2, 3, 4, 5)$  具体形式略。

依照线性代数理论, 基本微分方程可以写成

$$D_0 \Phi = p \quad (10-18)$$

展开为

$$SS_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta} + SS_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} + SS_{53} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^3} + SS_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} +$$

$$SS_{35} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^6} + SS_{17} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} = p$$

对于均布载荷选取

$$\Phi = \frac{p}{81216} \left( \frac{(\xi - 0.5)^8}{SS_{80}} + \frac{(\xi - 0.5)^4 (\eta - 0.5)^4}{SS_{44}} + \frac{(\eta - 0.5)^8}{SS_{08}} \right) \quad (10-19)$$

这样特解可由式(10-17)求得。

### 3. 求解模式

在实际计算中,不可能取无穷大,设最大取  $M$ ,这样一般解析解式(10-13)、式(10-14)和式(10-15)共有  $16M+18$  个未知数。对于任意铺设矩形板,每边有四个边界条件,共有 16 个边界条件。将一般解析解代入 16 个边界条件中,形成 16 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项余弦级数。根据余弦级数的正交性,可以得到  $16M+16$  个线性代数方程。一般解析解代入式(10-4),可得有关补充项的两个方程,这样共建立  $16M+18$  个方程,可以求解  $16M+18$  个未知数,至此横向弯曲问题得解。

## 10.3 任意铺设矩形板弯曲解析解数值验证部分

为了考查本书解的收敛性和稳定性,我们针对两层  $[0/45]_T$  铺设四边固定固支矩形板在均布载荷作用下的横向弯曲进行计算。

四边固支固定边界条件为

$$\begin{aligned} \xi = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad W = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \\ \eta = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad W = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

后面计算要涉及到的四边简支固定边界条件为

$$\xi = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad W = 0 \quad M_\xi = 0$$

$$\eta = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad W = 0 \quad M_\eta = 0$$

材料常数为  $E_1 = 145 \text{ GPa}$   $E_2 = 9.6 \text{ GPa}$   $G_{12} = 4.1 \text{ GPa}$   $\nu_{12} = 0.3$

几何、载荷参数为  $a = b = 1 \text{ m}$   $h = 0.01 \text{ m}$   $q = 10^4 \text{ N/m}^2$

类似参考文献[100]中有关对称性分析,从任意铺设矩形板材料、边界条件和载荷对称情况可以推得:当任意铺设矩形板材料、边界条件和载荷呈中心对称时,板挠度呈中心对称,而面内位移  $U$ 、 $V$  呈反对称,具体表示为

$$W(\xi, \eta) = W(1 - \xi, 1 - \eta)$$

$$U(\xi, \eta) = -U(1 - \xi, 1 - \eta)$$

$$V(\xi, \eta) = -V(1 - \xi, 1 - \eta)$$

在数值计算中引入这一结论,从而将待定系数缩减。

为了显示任意铺设层合板位移  $W$ 、 $U$ 、 $V$  总体分布情况,下面给出表 10-1、表 10-2 和表 10-3。计算时取  $M$  为 30。

表 10-1  $M=30$  板挠度  $W \times 100$  分布

$\xi \backslash \eta$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.125	0.232	0.234	0.203	0.084	0.000
0.5	0.000	0.206	0.450	0.487	0.450	0.206	0.000
0.8	0.000	0.084	0.203	0.234	0.232	0.125	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 10-2  $M=30$  板水平位移  $U \times 10^4$  分布

$\xi \backslash \eta$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	-0.116	0.022	0.090	0.140	0.159	0.000
0.5	0.000	-0.288	-0.138	0.000	0.138	0.288	0.000
0.8	0.000	-0.159	-0.140	-0.090	-0.022	-0.116	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 10-3  $M=30$  板纵向位移  $V$  分布

$\xi \backslash \eta$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.361	0.342	0.240	0.103	-0.152	0.000
0.5	0.000	0.473	0.205	0.000	-0.205	-0.473	0.000
0.8	0.000	0.152	-0.103	-0.240	-0.342	-0.361	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

为了考察本书解的稳定性,本节针对上面层合板中心挠度及内力矩、内力,变化  $M$  考察所得解数值得稳定性,结果反映在表 10-4 中。

表 10-4  $M$  变化时板中心挠度、内力、内力矩值

$N$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$
4	0.004884	342.70	144.33	76.390	-3090.1	6315.6
12	0.004870	332.45	139.18	73.023	-3733.3	5766.0
18	0.004870	332.40	139.16	73.001	-3738.8	5754.1
24	0.004870	334.42	139.17	73.012	-3734.4	5759.2
28	0.004870	332.43	139.18	73.019	-3731.8	5762.2
32	0.004870	332.44	139.19	73.024	-3729.8	5764.6
40	0.004870	332.45	139.19	73.030	-3727.2	5767.7

从表 10-1、表 10-2 和表 10-3 可看出,本书解可较好地满足边界条件,具有较好的收敛性;从表 10-4 发现,当  $M$  增大时,解数值保持稳定,而且挠度收敛速度高于内力收敛速度;计算中发现,对于不同的材料、边界条件及铺层方式,所需计算项数需经具体计算确定,一般  $M$  取为 30 已可得到较满意的结果。

层合板物理量与计算所选坐标系无关,以此通过坐标转换可以发现: $(\beta_1/\beta_2/\cdots/\beta_N)_T$  铺设层合板与  $(90-\beta_1/90-\beta_2/\cdots/90-\beta_N)_T$  铺设层合板对称。为显示这种铺层对称性,选择  $[0/10]_T$ 、 $[90/80]_T$  进行

比较计算,所得板中心挠度 $W$ 、弯矩 $M_x$ 、 $M_y$ 、扭矩 $M_{xy}$ 、平面力 $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$ 的结果反映在表 10-5 中。计算中取 $M$ 为 30。

表 10-5 铺层对称性验证计算结果

铺层方式	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$[10/0]_T$	0.002519	435.27	28.494	33.446	43.344	-1170.30	-4100.80
$[80/90]_T$	0.002519	28.494	435.27	33.446	-1170.30	43.344	-4100.80
$[0/10/20/30]_T$	0.0037617	393.14	84.195	77.068	-1135.30	6454.40	8620.90
$[90/80/70/60]_T$	0.0037617	84.195	393.14	77.068	6454.40	-1135.30	8620.90

在实际工艺制作中很难保证纤维铺设角精确满足设计值,实际中纤维取向的微量差异对层合板力学性能有多大影响,这是工程界所关心的。本书针对 $[0/\beta]_T$ 层合板,逐渐减小 $\theta$ ,将所得板中心挠度弯矩、扭矩的计算结果与 $[0]_T$ 铺设正交异性板相应结果比较,据此探讨铺设角微小变化对层合板影响。

表 10-6 微小 $\theta$ 的 $[0/\beta]_T$ 层合板与 $[0]_T$ 层合板计算结果比较

$\theta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$
1	0.0022515	439.88	18.886	3.4478	-8.2606	12.431
0.5	0.0022494	439.92	18.812	1.7250	-8.1324	3.0754
0.1	0.0022487	439.93	18.788	0.3496	-8.0917	0.0798
0.08	0.0022487	439.39	18.787	0.2891	-8.0911	0.0349
0.0*	0.0022486	439.90	18.790	0.0000	0.000	0.0000
* 解答依据第 3 章各向异性矩形板一般解析解计算而得						

从表 10-6 可发现铺设角微小误差对板挠度内力影响不大,而且误差越小由此带来的板刚度内力差异越小,当 $\beta$ 逼近 0 时,表中显示的层合板各物理量已逼近 $\beta$ 为 0 的正交异性板,这从另一侧面验证了本书解的正确性。

# 10.4 任意铺设矩形板结构力学响应数值分析

下面按照上述方法进行数值计算,以研究任意铺设对任意铺设板刚度内力的影响。

为察材料各向异性程度对板弯曲状态的影响,本文选择 2 种复合材料进行分析,其材料 1 为强各向异性材料,材料 2 为弱各向异性材料,其材料参数见表 10-7。

表 10-7 复合材料的工程参数

材料特性	$E_1/\text{GPa}$	$E_2/\text{GPa}$	$G_{12}/\text{GPa}$	$G_{13}/\text{GPa}$	$G_{23}/\text{GPa}$	$\gamma_{12}$
强各向异性	144.79	9.65	4.14	4.14	3.212	0.3
弱各向异性	143.6	75.4	42.1	25.6	42.7	0.44

## 1. 铺设参数对板结构弯曲影响分析数值结果

为避免横向剪切效应的影响,计算采取薄板(此处取  $a/h = 100$ )进行计算,取  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = 10000\text{N/m}^2$ ,计算中取  $M = 26$ 。铺设方式选取如下方式  $[0/\beta]_{NT}$ ,本书给出表 10-8 ~ 表 10-14 分别考察四边简支(SSSS)方板中心挠度及中心处弯矩( $M_x$   $M_y$ )、扭矩( $M_{xy}$ )、面内力( $N_x$   $N_y$   $N_{xy}$ )随铺设层数  $2N$ 、铺设角变化趋势。

表 10-8  $N=1$  材料 1 的 SSSS  $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/\text{m}$	$M_x/\text{N}$	$M_y/\text{N}$	$M_{xy}/\text{N}$	$N_x/(\text{N/m})$	$N_y/(\text{N/m})$	$N_{xy}/(\text{N/m})$
$0^\circ$	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0
$15^\circ$	0.01149	1178.9	129.04	127.41	-14843.0	8124.0	29654.0
$30^\circ$	0.01163	947.78	213.35	163.81	-51977.0	18965.0	32373.0
$45^\circ$	0.01182	777.76	267.06	140.14	-89057.4	26215.0	18240.0
$60^\circ$	0.01255	754.60	402.652	157.10	-10444.0	61444.0	23835.0
$75^\circ$	0.01339	718.19	601.36	116.22	-11678.0	10557.0	22779.0
$90^\circ$	0.01364	685.79	685.79	0	-12325.0	12325.0	0

表 10-9  $N=2$  材料 1 的 SSSS $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$0^\circ$	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0
$15^\circ$	0.01042	1154.4	120.52	125.54	-7258.8	3722.1	13985.0
$30^\circ$	0.00981	936.69	193.33	175.49	-24429.0	8323.0	14523.0
$45^\circ$	0.00955	784.41	272.03	177.05	-41212.0	12492.0	8846.4
$60^\circ$	0.01001	735.55	406.67	170.06	-48434.0	29787.0	12007.0
$75^\circ$	0.01098	713.00	594.95	122.63	-56703.0	51905.0	11556.0
$90^\circ$	0.01139	693.50	693.50	0	-61685.0	61685.0	0

表 10-10  $N=4$  材料 1 的 SSSS $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$0^\circ$	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0
$15^\circ$	0.01027	1149.40	118.64	125.20	-3608.1	1832.4	6907.3
$30^\circ$	0.00949	932.93	189.98	177.88	-12043.0	4045.6	7100.1
$45^\circ$	0.00921	783.20	273.96	183.84	-20271.0	6197.9	4407.3
$60^\circ$	0.00974	729.18	405.85	172.73	-24012.0	14776.0	5994.0
$75^\circ$	0.01068	710.49	591.88	122.87	-28160.0	25828.0	5773.7
$90^\circ$	0.01133	694.03	694.03	0	-30831.0	30831.0	0

表 10-11  $N=40$  材料 1 的 SSSS $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$0^\circ$	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0
$15^\circ$	0.01022	1147.70	118.04	125.08	-360.11	182.28	687.95
$30^\circ$	0.00939	931.54	189.00	178.64	-1199.2	400.00	704.44
$45^\circ$	0.00911	782.79	274.62	185.95	-2016.6	618.35	440.27
$60^\circ$	0.00964	727.04	405.51	173.32	-2390.1	147.37	599.90
$75^\circ$	0.01059	709.65	590.82	122.90	-2809.9	2578.6	577.14
$90^\circ$	0.01106	694.16	694.16	0	-3082.7	3082.7	0

表 10-12  $N=1$  材料 2 的 SSSS $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$0^\circ$	0.004006	601.30	360.10	0	0	0	0
$15^\circ$	0.004025	594.65	368.25	23.143	-1728.2	1807.2	3181.4
$30^\circ$	0.004065	574.95	390.97	40.711	-6538.9	6838.2	5691.9
$45^\circ$	0.004093	544.89	422.27	47.422	-13284.0	13755.0	6717.4
$60^\circ$	0.004087	512.56	452.35	40.754	-20110.0	20494.0	5790.5
$75^\circ$	0.004060	488.29	472.54	23.37	-25065.0	25169.0	3273.8
$90^\circ$	0.004046	479.56	479.56	0	-26839.0	26839.0	0

表 10-13  $N=2$  材料 2 的 SSSS $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$0^\circ$	0.00401	601.30	360.10	0	0	0	0
$15^\circ$	0.00402	594.28	368.42	23.43	-863.47	902.17	1587.8
$30^\circ$	0.00981	574.15	391.21	40.161	-3261.4	3403.8	2831.0
$45^\circ$	0.00405	544.56	422.24	46.532	-6617.7	6837.2	3338.3
$60^\circ$	0.00405	513.30	452.44	40.189	-10028.0	10199.0	2889.7
$75^\circ$	0.00403	489.77	473.61	23.065	-12521.0	12575.0	1645.6
$90^\circ$	0.00402	481.10	481.10	0	-13424.0	13424.0	0

表 10-14  $N=40$  材料 2 的 SSSS $[0/\beta]_{NT}$  层合板中心挠度、内力值

$\beta$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
$0^\circ$	0.00401	601.30	360.10	0	0	0	0
$15^\circ$	0.00401	594.16	368.48	23.010	-43.163	45.085	79.345
$30^\circ$	0.00403	573.88	391.29	39.98	-162.94	169.94	141.31
$45^\circ$	0.00404	544.49	422.23	46.236	-330.48	341.23	166.66
$60^\circ$	0.00403	513.55	452.48	39.972	-500.93	509.29	144.43
$75^\circ$	0.00402	490.21	473.91	23.000	-625.85	628.54	82.425
$90^\circ$	0.00401	481.57	481.57	0	-671.2	671.20	0



本书又针对四边固支板进行相应分析计算。铺设方式仍选取如下方式 $[0/\beta]_{NT}$ 。计算中取 $a=1\text{m}, b=1\text{m}, h=0.01\text{m}, q=10000\text{N/m}^2$ , 取 $M=26$ , 表 10-15 ~ 表 10-17 给出所选的强各向异性材料层合板的中心挠度及边中心 $(0.0, 0.5)$ 弯矩 $(M_x M_y)$ 、扭矩 $(M_{xy})$ 、面内力 $(N_x N_y N_{xy})$ 随铺设层数 $2N$ 、铺设角 $\beta$ 变化趋势。

表 10-15  $N=1$  材料 1 的 CCCC $[0/\beta]_{NT}$ 层合板挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5, 0.5)$ /m	$M_x(0, 0.5)$ /N	$M_y(0, 0.5)$ /N	$M_{xy}(0, 0.5)$ /N	$N_x(0, 0.5)$ /(N/m)	$N_y(0, 0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0, 0.5)$ /(N/m)
0	0.002250	-846.00	-16.92	0	0	0	0
15	0.002827	-846.32	-44.99	-92.662	992.71	-6459.8	-6242.8
30	0.003947	-761.19	-105.61	-138.03	7723.8	-27026.0	-5943.7
45	0.004870	-666.85	-150.662	-122.91	7860.66	-30944.0	143.51
60	0.005354	-597.36	-139.31	-65.223	4305.41	-27104.0	50276
75	0.005510	-558.52	-83.932	-15.443	-545.23	-19238.0	4507.7
90	0.005531	-547.04	-48.250	0	-2756.4	-12554.0	0

表 10-16  $N=4$  材料 1 的 CCCC $[0/\beta]_{NT}$ 层合板挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5, 0.5)$ /m	$M_x(0, 0.5)$ /N	$M_y(0, 0.5)$ /N	$M_{xy}(0, 0.5)$ /N	$N_x(0, 0.5)$ /(N/m)	$N_y(0, 0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0, 0.5)$ /(N/m)
0	0.002250	-846.00	-16.92	0	0	0	0
15	0.002351	-828.29	-42.088	-85.582	1343.9	-2903.1	-1044.4
30	0.002549	-770.19	-100.93	-141.38	3093.7	-1579.4	-1058.7
45	0.002681	-672.43	-118.40	-93.404	2056.3	-4929.8	483.19
60	0.002678	-637.73	-135.73	-70.739	180.40	-3199.8	410.33
75	0.002594	-577.98	-55.256	-10.777	-91.691	-2125.5	517.08
90	0.002545	-561.60	-22.147	0	-319.50	-1399.6	0

表 10-17  $N=40$  材料 1 的 CCCC $[0/\beta]_{NT}$  层合板挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5,0.5)$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0	0.002250	-846.00	-16.92	0	0	0	0
15	0.002326	-819.28	-41.072	-79.667	1936.2	-332.81	-89.664
45	0.002604	-682.16	-126.44	-10.373	160.96	-455.73	30.227
60	0.002593	-639.54	-136.09	-71.166	15.547	-308.78	38.497
75	0.002506	-578.57	-54.471	-10.650	-8.9622	-204.93	49.904
90	0.002458	-562.09	-21.560	0	-30.748	-134.87	0

## 2. 耦合效应对板结构弯曲影响分析数值结果

为研究拉弯耦合对任意铺设层合板弯曲具体影响,可忽略拉弯耦合效应将任意铺设层合板视为各向异性板进行计算,并将此结果与按真实的任意铺设层合板计算所得相应结果比照,以反映拉弯耦合的影响。计算选取材料 1 的 SSSS 板及 CCCC 板解析进行,板结构参数为  $a=1\text{m}$ ,  $b=1\text{m}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $q=10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 10-18 和表 10-19 中。表 10-18 和表 10-19 每格中 \* 位置数值为按任意铺设解计算真实值, \*\* 位置数值为按各向异性板计算所得比拟值。

表 10-18 考虑拉弯耦合及忽略拉弯耦合两情况下

材料 1 CCCC 板挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5,0.5)$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0	0.00225 *	-846.00	-16.92	0	0	0	0
15	0.00283 *	-846.32	-44.99	-92.662	992.71	-6459.8	-6242.8
	0.00258 **	-724.50	-138.00	139.50	0	0	0
30	0.00395	-761.19	-105.61	-138.03	7723.8	-27026.0	-5943.7
	0.00248	-767.10	-46.74	5.071	0	0	0

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5, 0.5)$ /m	$M_x(0, 0.5)$ /N	$M_y(0, 0.5)$ /N	$M_{xy}(0, 0.5)$ /N	$N_x(0, 0.5)$ /(N/m)	$N_y(0, 0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0, 0.5)$ /(N/m)
45	0.00487	-666.85	-150.66	-122.91	7860.66	-30944.0	143.51
	0.00260	-631.90	-123.10	-64.82	0	0	0
60	0.00535	-597.36	-139.31	-65.223	4305.41	-27104.0	50276
	0.00235	-830.90	-52.91	-110.20	0	0	0
75	0.00551	-558.52	-83.932	-15.443	-545.23	-19238.0	4507.7
	0.00241	-805.70	-72.460	130.100	0	0	0
90	0.00553	-547.04	-48.250	0	-2756.4	-12554.0	0
	0.00258	-610.50	-102.70	42.67	0	0	0

表 10-19 考虑拉弯耦合及忽略拉弯耦合两情况下

材料 1 SSSS 板挠度内力计算结果

$\theta/(^{\circ})$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
0	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0
15	0.01149	1178.9	129.04	127.41	-14843.0	8124.0	29654.0
	0.00907	813.2	245.70	-188.50	0	0	0
30	0.01163	947.78	213.35	163.81	-51977.0	18965.0	32373.0
	0.01088	700.90	654.70	-80.30	0	0	0
45	0.01182	777.76	267.06	140.14	-89057.4	26215.0	18240.0
	0.00954	729.50	387.30	175.80	0	0	0
60	0.01255	754.60	402.65	157.10	-10444.0	61444.0	23835.0
	0.01008	1111.00	130.10	145.50	0	0	0
75	0.01339	718.19	601.36	116.22	-11678.0	10557.0	22779.0
	0.00978	1036.00	153.80	-161.10	0	0	0
90	0.01364	685.79	685.79	0	-12325.0	12325.0	0
	0.00984	722.30	444.40	-167.10	0	0	0

类似地,忽略层合板中拉剪效应按假想无拉剪耦合效应的铺设层合板进行计算,可以研究拉剪耦合对任意铺设层合板弯曲状态具体影响,并将此结果与按真实的任意铺设层合板计算所得相应结果比照,可以反映拉剪耦合效应的影响。计算选取材料 1 的 SSSS 板及 CCCC 板解析进行,板结构参数为  $a=1\text{m}$ ,  $b=1\text{m}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $q=10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\theta]_T$ 。具体结果反映在表 10-20 和表 10-21。表 10-20 和表 10-21 中每格\*位置数值为按任意铺设解计算真实值,\*\*位置数值为忽略拉剪耦合计算所得比拟值。

表 10-20 考虑拉剪耦合及忽略拉剪耦合两情况下

材料 1 CCCC 板挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5,0.5)$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0	0.002250	-846.00	-16.92	0	0	0	0
15	0.00283 *	-846.32	-44.99	-92.662	992.71	-6459.8	-6242.8
	0.00270 **	-841.11	-39.73	-74.858	7795.30	-14465.0	-2582.30
30	0.00395	-761.19	-105.61	-138.03	7723.8	-27026.0	-5943.7
	0.00347	-819.67	-96.39	-131.54	1439.50	-44374.0	-2467.10
45	0.00487	-666.85	-150.662	-122.91	7860.66	-30944.0	143.51
	0.00477	-766.98	-180.020	-158.37	4859.10	-95360.0	1621.90
60	0.00535	-597.36	-139.31	-65.223	4305.41	-27104.0	50276
	0.00624	-663.72	-239.10	-131.98	-12945.0	-105870.0	-8626.30
75	0.00551	-558.52	-83.932	-15.443	-545.23	-19238.0	4507.7
	0.00620	-612.70	-99.563	-18.772	5108.0	-52475.0	7750.80
90	0.00553	-547.04	-48.250	0	-2756.4	-12554.0	0

表 10-21 考虑拉剪耦合及忽略拉剪耦合两情况下

材料 1 SSSS 板挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w/\text{m}$	$M_x/\text{N}$	$M_y/\text{N}$	$M_{xy}/\text{N}$	$N_x/(\text{N/m})$	$N_y/(\text{N/m})$	$N_{xy}/(\text{N/m})$
0	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
15	0.01149 *	1178.9	129.04	127.41	-14843.0	8124.0	29654.0
	0.01106 **	1181.6	126.54	120.43	-13254.0	5180.2	27876.0
30	0.01163	947.78	213.35	163.81	-51977.0	18965.0	32373.0
	0.01174	984.60	202.30	140.77	-54144.0	19415.0	31819.0
45	0.01182	777.76	267.06	140.14	-89057.4	26215.0	18240.0
	0.01296	857.17	231.73	87.78	-108630.0	36553.0	27473.0
60	0.01255	754.60	402.65	157.10	-10444.0	61444.0	23835.0
	0.01465	870.53	305.48	82.25	-142170.0	61430.0	38134.0
75	0.01339	718.19	601.36	116.22	-11678.0	10557.0	22779.0
	0.01450	784.43	537.35	93.43	-134080.0	102340.0	39135.0
90	0.01364	685.79	685.79	0	-12325.0	12325.0	0

对弯扭耦合效应研究可采用与上相似的思路进行,忽略层合板中弯扭效应按假想无弯扭耦合效应的铺设层合板进行计算,以研究弯扭耦合对任意铺设层合板弯曲状态具体影响,并将此结果与按真实的任意铺设层合板计算所得相应结果比照,可以反映弯扭耦合效应的影响。计算选取材料 1 的 SSSS 板及 CCCC 板解析进行,板结构参数为  $a=1m, b=1m, h=0.01m, q=10000N/m^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 10-22 和表 10-23 中。表 10-22 和表 10-23 每格中 \* 位置数值为按任意铺设解计算真实值, \*\* 位置数值为忽略弯扭耦合计算所得比拟值。

表 10-22 考虑弯扭耦合及忽略弯扭耦合两情况下

材料 1 CCCC 板挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5,0.5)$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0	0.002250	-846.00	-16.92	0	0	0	0

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w(0.5,0.5)$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
15	0.00283 *	-846.32	-44.99	-92.662	992.71	-6459.8	-6242.8
	0.00279 **	-837.03	-44.94	5.0449	-4159.80	-3513.90	-7821.50
45	0.004870	-666.85	-150.66	-122.91	7860.66	-30944.0	143.51
	0.005090	-662.95	-154.58	105.91	7629.90	-31910.0	3959.0
60	0.005354	-597.36	-139.31	-65.223	4305.41	-27104.0	50276.0
	0.005729	-549.59	-102.68	19.748	-3154.60	-31189.0	-1978.3
75	0.005510	-558.52	-83.932	-15.443	-545.23	-19238.0	4507.7
	0.005666	-574.77	-102.30	13.792	2630.30	-22952.0	6744.2
90	0.005531	-547.04	-48.250	0	-2756.4	-12554.0	0

表 10-23 考虑弯扭耦合及忽略弯扭耦合两情况下  
材料 1 SSSS 板挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w/m$	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x/(N/m)$	$N_y/(N/m)$	$N_{xy}/(N/m)$
0	0.01066	1258.04	80.99	0	0	0	0
15	0.01149 *	1178.9	129.04	127.41	-14843.0	8124.0	29654.0
	0.01065 **	1132.9	121.11	-14.06	-18424.0	4320.5	28153.0
30	0.01163	947.78	213.35	163.81	-51977.0	18965.0	32373.0
	0.01056	876.87	187.92	-76.95	-57569.0	8386.70	29155.0
45	0.01182	777.76	267.06	140.14	-89057.4	26215.0	18240.0
	0.01117	734.94	235.61	-137.98	-86804.0	11102.0	17702.0
60	0.01255	754.60	402.65	157.10	-10444.0	61444.0	23835.0
	0.01271	739.75	335.44	-131.43	-103630.0	34235.0	17023.0
75	0.01339	718.19	601.36	116.22	-11678.0	10557.0	22779.0
	0.01388	741.75	549.87	-61.412	-119810.0	89194.0	18298.0
90	0.01364	685.79	685.79	0	-12325.0	12325.0	0

### 3. 结论

分析表 10-8 ~ 表 10-23, 可以得到以下结论。

(1) 拉弯耦合效应对板挠度、内力有重大影响。拉弯耦合效应增大了板挠度。从表 10-18 和表 10-19 可发现, 忽略拉弯耦合按各向异性板计算所得挠度均小于实际任意铺设层合板挠度。在本节涉及的两种边界中, 相对 SSSS 板, 拉弯耦合效应对 CCCC 板挠度增大更为明显, 如表 10-18 显示  $[0/90]_T$  铺设板实际挠度为忽略拉弯耦合所得挠度的 2 倍, 而 SSSS 板相应结果只为 1.4 左右。只考查比拟各向异性板挠度值, 不同的  $\theta$  比拟板挠度  $W^{**}$  相差并不大, 这说明弯扭耦合效应对板挠度影响要弱于拉弯耦合对板挠度的影响。拉弯耦合对板内力有更大的影响, 对于存在拉弯耦合效应的层合板, 横向载荷不仅可引起弯矩、扭矩内力, 而且在板平面引起板的平面内力, 而且平面内力  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  在数值上明显大于横向弯矩  $M_x$ 、 $M_y$ 、扭矩  $M_{xy}$ 。拉弯耦合效应在大多数情况下可不同程度地降低层合板弯矩、扭矩, 但这是以层合板平面内力的存在或产生为代价的, 当然复合材料板在平面内承载能力要强于其对横向弯曲载荷承载能力。如仅考虑结构的刚度、强度, 对于仅承受横向载荷的结构来说, 为了使设计简单, 应避免结构中存在拉弯耦合效应。由于拉弯耦合可以发挥板结构横向、纵向承载能力, 可以预料对于同时存在纵向、横向载荷的层合板, 利用拉弯耦合可以提高层合板的性能。

(2) 拉剪耦合效应对板结构内力影响不可忽略。比较而言, 拉剪耦合效应对层合板横向位移(挠度)、横向内力(弯矩、扭矩)影响要小于层合板面内内力。拉剪耦合效应在大多数情况下有助于提高结构刚度, 而且可以降低层合板横向内力。从表 10-20 和表 10-21 可看出, 忽略拉剪耦合效应所得面内力一般大于实际任意铺设层合板面内力。可见拉剪耦合效应对任意铺设层合结构的刚度强度是有利的。相对而言, 拉剪耦合效应对结构影响程度要小于拉弯耦合对结构的影响程度。

(3) 弯扭耦合效应对任意铺设层合板结构内力有不同程度的影

响。分析表 10-22 和表 10-23, 弯扭耦合效应对任意铺设层合板横向位移(挠度)、横向弯矩影响较小, 而对任意铺设层合板扭矩、面内力影响要大得多。在对各向异性板(对称角铺设层合板)解析研究已发现弯扭耦合对对称角铺设层合板有重大影响, 对于本章所研究的任意铺设层合板同时存在拉弯耦合效应、拉剪耦合, 各种耦合效应的综合作用, 在一定程度上掩盖了弯扭耦合对结构刚度能力等物理量的影响。在复合材料的气动弹性剪裁中, 结构的弯扭耦合效应就发挥了重要作用。

(4) 从本章表 10-8 ~ 表 10-17 发现铺设角  $\beta$  对任意铺设层合板挠度、内力弯矩有重大影响: 对于本书选择  $[0/\beta]_T$  铺层 SSSS 板,  $\beta$  从  $0^\circ$  增大到  $90^\circ$ , 相应板中心挠度、板中心  $M_x$  逐渐增大, 并在  $90^\circ$  分别达到最大值, 而此时板中心  $M_y$  则呈现相反的趋势。对于本书选择  $[0/\beta]_T$  铺层 CCCC 板,  $\beta$  从  $0^\circ$  增大到  $90^\circ$ , 相应板中心挠度逐渐增大, 并在  $90^\circ$  分别达到最大值,  $M_x$  则呈现与之相反的趋势; CCCC 板边中心  $M_y$  在  $\beta$  从  $0^\circ$  增时最低, 但中心  $M_y$  最大值发生在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度。对于本书所选  $[0/\beta]_{NT}$  任意铺设板, 当  $N$  大于 1 时, 铺设角  $\theta$  对任意铺设层合板挠度、内力弯矩有影响规律不完全等同于  $[0/\beta]_T$  铺层板, 如  $N$  大于 1 时的任意铺设 SSSS 板最小挠度发生在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度, 而且大多数情况下这一角度为  $45^\circ$ ; 而  $N$  大于 1 的任意铺设 CCCC 板最大挠度发生在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度, 而且大多数情况下这一角度也为  $45^\circ$ , 最小挠度发生在  $0^\circ$ 。对  $[0/\beta]_{NT}$  铺层板,  $N$  大于 1 时, 当  $\beta$  从 0 增加时, 层合板扭矩、面内力变化规律要复杂得多, 需具体计算探讨。

(5) 铺设层数  $N$  增大对层合板刚度内力有不同程度的影响。对本书选择铺设方式的任意铺设层合板, 在其他参数相同情况,  $N$  增大, 板挠度、内力不同程度地减小。比较而言, 面内力减小程度最大。值得注意的是,  $N$  的增大可能会改变任意铺设层合板挠度随  $\theta$  变化的趋势。

(6) 层合板边界条件及材料各向异性程度对任意铺设层合板



刚度、内力分布变化规律影响是明显的。对本章表 10-8 ~ 表 10-23 进行总体分析可发现:具有不同边界的层合板随各设计参数受耦合相应影响的程度趋势是有差异的,有时甚至会有很大差异,需要根据实际边界具体计算分析。材料各向异性决定了复合材料结构与金属等各向同性材料制成的结构有本质不同,显然各向异性程度高的复合材料层合结构受有关设计参数、耦合效应的影响更大,反之也是成立的。

## 10.5 基于经典理论的一般铺设 复合材料矩形板屈曲和振动问题解析

基于经典理论的一般角铺设复合材料矩形板屈曲和振动问题控制方程合写为下式:

$$L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W = 0 \quad (10-20(a))$$

$$L_{12}U + L_{22}V + L_{23}W = 0 \quad (10-20(b))$$

$$L_{13}U + L_{23}V + L_{33}W = 0 \quad (10-20(c))$$

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (A_{12} + A_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\text{式中: } L_{13} = - \left( B_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3B_{16}\alpha \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + \right.$$

$$\left. B_{26}\alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{a}$$

$$L_{23} = - \left( B_{16} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3B_{26}\alpha \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& B_{22}\alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \Big) \frac{1}{a} \\
L_{33} = & \frac{1}{a^2} \left( D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 4D_{16}\alpha \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D_{12} + D_{66})\alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \right. \\
& \left. 4D_{26}\alpha^3 \frac{\partial^4}{\partial \eta^3 \partial \xi} + D_{22}\alpha^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) - \rho\omega^2 a^2 + N_x \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \\
& 2N_{xy}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$N_x, N_y, N_{xy}$  为板中面单位长度上  $x, y$  方向压力载荷、剪力载荷,  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。对于屈曲问题, 方程(10-20)中要舍去  $\omega$ 。对于振动问题, 方程(10-20)要舍去  $N_x, N_y, N_{xy}$ 。

### 1. 齐次解

设方程(10-20)有如下齐次解:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \\
U &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\eta) e^{i m \sigma \xi} \\
V &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(\eta) e^{i m \sigma \xi}
\end{aligned} \tag{10-21}$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$\begin{aligned}
f_m(\eta) &= i G e^{i m \sigma \eta r} \\
g_m(\eta) &= E e^{i m \sigma \eta r} \\
h_m(\eta) &= F e^{i m \sigma \eta r}
\end{aligned} \tag{10-22}$$

式中:  $m$  为非 0 整数,  $G, E$  和  $F$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

为了使后续表述更加紧凑, 引入如下标注:

$$LL_{11} = A_{11}(m\pi)^2 + 2A_{16}\alpha(m\pi)^2 r + A_{66}\alpha^2(m\pi)^2 r^2$$

$$LL_{12} = A_{16}(m\pi)^2 + (A_{12} + A_{66})\alpha(m\pi)^2 r + A_{26}\alpha^2(m\pi)^2 r^2$$

$$LL_{22} = A_{66}(m\pi)^2 + 2A_{26}\alpha(m\pi)^2 r + A_{22}\alpha^2(m\pi)^2 r^2$$

$$LL_{13} = (B_{11} + 3B_{16}\alpha r + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 r^2 + B_{26}\alpha^3 r^3) \frac{1}{a}(m\pi)^3$$

$$LL_{23} = (B_{16} + 3B_{26}\alpha r + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 r^2 + B_{22}\alpha^3 r^3) \frac{1}{a}(m\pi)^3$$

$$LL_{33} = \frac{1}{a^2}(D_{11} + 4D_{16}\alpha r + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 r^2 + 4D_{26}\alpha^3 r^3 + D_{22}\alpha^4 r^4)$$

$$(m\pi)^4 - \rho\omega^2 a^2 - (N_x + 2N_{xy}\alpha r + N_y\alpha^2 r^2)(m\pi)^2$$

将式(10-21)和式(10-22)代入方程(10-20) 推得

$$\begin{bmatrix} LL_{11} & LL_{12} & LL_{13} \\ LL_{12} & LL_{22} & LL_{23} \\ LL_{13} & LL_{23} & LL_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G \\ E \\ F \end{Bmatrix} = 0 \quad (10-23)$$

$$[LL_{kj}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} G \\ E \\ F \end{Bmatrix} = 0$$

特征方程可由下式推导得出:矩阵 $[LL_{kj}]_{3 \times 3}$ 行列式值为0。

特征方程为8阶代数多项式:

$$SY_{80} + SY_{71}\alpha r + SY_{62}\alpha^2 r^2 + SY_{53}\alpha^3 r^3 + SY_{44}\alpha^4 r^4 + SY_{35}\alpha^5 r^5 + SY_{26}\alpha^6 r^6 + SY_{17}\alpha^7 r^7 + SY_{08}\alpha^8 r^8 = 0 \quad (10-24)$$

上式中 $r$ 是 $m$ 的函数, $SY_{80}, \dots, SY_{08}$ 具体形式复杂,可以采用 MATH-CAD 软件推导出来,本节略。

式(10-24)有8个特征根,可以标记为 $r_k, r_{k+1} (k=1, 3, 5, 7)$ 。随着 $m$ 和频率 $\omega$ 或中面载荷 $(N_x, N_y, N_{xy})$ 组合的变化,方程(10-24)特征根可能是成对的共轭复数 $(r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k)$ ,或者是成对的实数根 $(r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1})$ 。采取类似的步骤,可得 $W, U$ 和 $V$

的齐次解:

$$\begin{aligned}
 (U, V, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} \{ (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} \quad (10-25)
 \end{aligned}$$

考虑一般性,再设

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i\pi\alpha\xi} e^{i\pi\sigma\eta} \\
 V &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i\pi\alpha\xi} e^{i\pi\sigma\eta} \\
 W &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i\pi\alpha\xi} e^{i\pi\sigma\eta}
 \end{aligned} \quad (10-26)$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

类似地,可得另一个特征方程(10-27)、8 个特征根  $s_k, s_{k+1}$  ( $k = 1, 3, 5, 7$ ):

$$\begin{aligned}
 & SX_{80}s^8 + SX_{17}\alpha s^7 + SX_{26}\alpha^2 s^6 + SX_{35}\alpha^3 s^5 + SX_{44}\alpha^4 s^4 + SX_{53}\alpha^5 s^3 + \\
 & SX_{62}\alpha^6 s^2 + SX_{17}\alpha^7 s + SX_{08}\alpha^8 = 0
 \end{aligned} \quad (10-27)$$

式中:  $s$  为  $n$  的函数,  $SX_{80}, \dots, SX_{08}$  具体形式复杂,本节略。

另一组  $U^*, V^*, W^*$  齐次解合写为下式:

$$\begin{aligned}
 (U^*, V^*, W^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} \{ (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
 & (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
 & (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
 & (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \}
 \end{aligned}$$

$E_{jkm}, F_{jkm}$  和  $G_{jkm}$  之间的关系矩阵可采用前文章节类似方法得到。同样方法也可得到  $O_{4kn}, P_{4kn}$  和  $Q_{4kn}$  之间的关系矩阵。

## 2. 补充解

补充解可以根据常微分方程理论求得。

### 振动问题

对于振动问题, 方程(10-20)中的  $N_x, N_y$  和  $N_{xy}$  为 0。

设

$$\begin{aligned} U(\eta) &= e_y e^{\tau\eta} \\ V(\eta) &= f_y e^{\tau\eta} \\ W(\eta) &= g_y e^{\tau\eta} \end{aligned} \quad (10-28)$$

式中:  $g_y, e_y$  和  $f_y$  为待定常数,  $\tau$  为特征根。

将式(10-28)代入到方程(10-20)可得 8 阶方程:

$$\tau^4(SS_{08}\tau^4 + SS_{04}) = 0 \quad (10-29)$$

$$SS_{08}\tau^4 + SS_{04} = 0 \quad (10-30)$$

再设

$$\begin{aligned} U(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\ V(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ W(\xi) &= q_x e^{h\xi} \end{aligned} \quad (10-31)$$

式中:  $o_x, p_x$  和  $q_x$  为待定常数,  $h$  为特征根。

将式(10-31)代入方程(10-20)可得 8 阶方程

$$SS_{80}h^8 + SS_{40}h^4 = 0 \quad (10-32)$$

$$SS_{80}h^4 + SS_{40} = 0 \quad (10-33)$$

补充解可以合写为:

$$\begin{aligned} U^{**} &= t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\ &\quad t_6(\eta - 0.5)^2 + t_7(\xi - 0.5)^3 + t_8(\eta - 0.5)^3 + \\ &\quad \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, e_{yk}, e_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{xk}, o_{xk+1}) \end{aligned} \quad (10-34)$$

$$\begin{aligned}
V^{**} = & t_9 + t_{10}(\xi - 0.5) + t_{11}(\eta - 0.5) + t_{12}(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{13}(\eta - 0.5)^2 + t_{14}(\xi - 0.5)^3 + t_{15}(\eta - 0.5)^3 + \\
& \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{zk}, p_{zk+1})
\end{aligned}
\tag{10-35}$$

$$W^{**} = t_1 + \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, g_{yk}, g_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{zk}, q_{zk+1})
\tag{10-36}$$

式中:  $(g_{yk}, g_{yk+1}, q_{zk}, q_{zk+1}, k=1, 3)$  8 个待定常数,  $\tau_k, \tau_{k+1} (k=1, 3)$  是方程(10-30)的根。 $h_k, h_{k+1} (k=1, 3)$  是方程(10-33)的根。

将式(10-31)、式(10-32)和式(10-33)代入方程(10-20), 可得关于  $t_k (k=1, 2, \dots, 15)$  之间的 7 个方程式。将式(10-34)、式(10-35)和式(10-36)代入方程(10-20)任意 2 式, 可得到 2 个系数关系矩阵:

$$\begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{y2} \\ e_{y3} \\ e_{y4} \\ f_{y1} \\ f_{y2} \\ f_{y3}f_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZR_{11k} & -ZR_{21k} & ZR_{13k} & -ZR_{23k} \\ ZR_{21k} & -ZR_{11k} & ZR_{23k} & -ZR_{13k} \\ ZR_{31k} & -ZR_{41k} & ZR_{33k} & -ZR_{43k} \\ ZR_{41k} & -ZR_{31k} & ZR_{43k} & -ZR_{33k} \\ RR_{11k} & -RR_{21k} & RR_{13k} & -RR_{23k} \\ RR_{21k} & -RR_{11k} & RR_{23k} & -RR_{13k} \\ RR_{31k} & -RR_{41k} & RR_{33k} & -RR_{43k} \\ RR_{41k} & -RR_{31k} & RR_{43k} & -RR_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{y1} \\ g_{y2} \\ g_{y3} \\ g_{y4} \end{bmatrix}$$

(10-37)

$$\begin{bmatrix} o_{x1} \\ o_{x2} \\ o_{x3} \\ o_{x4} \\ p_{x1} \\ p_{x2} \\ p_{x3} \\ p_{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZT_{11} & -ZT_{21} & ZT_{13} & -ZT_{23} \\ ZT_{21} & -ZT_{11} & ZT_{23} & -ZT_{13} \\ ZT_{31} & -ZT_{41} & ZT_{33} & -ZT_{43} \\ ZT_{41} & -ZT_{31} & ZT_{43} & -ZT_{33} \\ RT_{11} & -RT_{21} & RT_{13} & -RT_{23} \\ RT_{21} & -RT_{11} & RT_{23} & -RT_{13} \\ RT_{31} & -RT_{41} & RT_{33} & -RT_{43} \\ RT_{41} & -RT_{31} & RT_{43} & -RT_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \\ q_{x4} \end{bmatrix} \quad (10-38)$$

这样,补充解式(10-34)、式(10-35)和式(10-36) 只有 16 个待定常数。

**承受一对边均布压力  $N_x$  的矩形板屈曲问题**

承受一对边均布压力  $N_x$  的矩形板屈曲问题,方程(10-20)中的  $\omega, N_y$  和  $N_{xy}$  为 0。

设

$$\begin{aligned} u(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\ v(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ w(\xi) &= q_x e^{h\xi} \end{aligned} \quad (10-39)$$

式中:  $o_x, p_x$  和  $q_x$  是实数待定常数,  $h$  为特征根。

将式(10-39)代入方程(10-20)得 8 阶特征方程:

$$SS_{80}h^8 + SS_{60}h^6 = 0 \quad (10-40)$$

$$SS_{80}h^2 + SS_{60} = 0 \quad (10-41)$$

$h_1, h_2$  是方程(10-41)的根。

补充解合写如下:

$$\begin{aligned} U^{**} &= t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_6(\eta - 0.5)^2 + t_7(\xi - 0.5)^3 + t_8(\eta - 0.5)^3 + \\ & \Gamma(h_1, h_2, \xi, o_{x1}, o_{x2}) \end{aligned} \quad (10-42)$$

$$\begin{aligned}
 V^{**} = & t_9 + t_{10}(\xi - 0.5) + t_{11}(\eta - 0.5) + t_{12}(\xi - 0.5)^2 + \\
 & t_{13}(\eta - 0.5)^2 + t_{14}(\xi - 0.5)^3 + t_{15}(\eta - 0.5)^3 + \\
 & \Gamma(h_1, h_2, \xi, p_{x1}, p_{x21}) \quad (10-43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^{**} = & t_1 + t_{16}(\xi - 0.5) + t_{17}(\eta - 0.5) + t_{18}(\xi - 0.5)^2 + \\
 & t_{19}(\eta - 0.5)^2 + t_{20}(\xi - 0.5)^3 + t_{20}(\eta - 0.5)^3 + \\
 & t_{21}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \Gamma(h_1, h_2, \xi, q_{x1}, q_{x2}) \quad (10-44)
 \end{aligned}$$

将式(10-42)、式(10-43)和式(10-44)代入方程(10-20)可得  $t_k (k=1, 2, \dots, 21)$  之间的 7 个关系式。

将式(10-42)、式(10-43)和式(10-44)代入方程(10-20)的任意两式,可得下式:

$$\begin{bmatrix} o_{x1} \\ o_{x2} \\ p_{x1} \\ p_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZR_{11} & -ZR_{21} \\ ZR_{21} & -ZR_{11} \\ RR_{11} & -RR_{21} \\ RR_{21} & -RR_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \end{bmatrix} \quad (10-45)$$

这样,补充解式(10-42)、式(10-43)和式(10-44)只有 16 个独立常数。

### 承受两对边均布压力( $N_x, N_y$ )的矩形板屈曲问题

对于承受两对边均布压力( $N_x, N_y$ )的矩形板屈曲问题,方程(10-20)中的  $N_x$  和  $\omega$  为 0。

设

$$\begin{aligned}
 U(\eta) &= e_\gamma e^{\tau\eta} \\
 V(\eta) &= f_\gamma e^{\tau\eta} \\
 W(\eta) &= g_\gamma e^{\tau\eta}
 \end{aligned} \quad (10-46)$$

式中:  $g_\gamma, e_\gamma$  和  $f_\gamma$  为待定常数,  $\tau$  为特征根。

将式(10-46)代入方程(10-20)可得 2 阶代数方程:



$$SS_{08} \tau^2 + SS_{06} = 0 \quad (10-47)$$

$\tau_1$  和  $\tau_2$  是方程(10-47)的根。

设

$$\begin{aligned} u(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\ v(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ w(\xi) &= q_x e^{h\xi} \end{aligned} \quad (10-48)$$

式中:  $o_x, p_x$  和  $q_x$  为实数待定常数,  $h$  是特征根。

将式(10-48)代入方程(10-20)得下式

$$SS_{80} h^2 + SS_{60} = 0 \quad (10-49)$$

$h_1$  和  $h_2$  是方程(10-49)的根。

补充解合写如下:

$$\begin{aligned} U^{**} &= t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_6(\eta - 0.5)^2 + t_7(\xi - 0.5)^3 + t_8(\eta - 0.5)^3 + \\ & \Gamma(h_1, h_2, \xi, o_{x1}, o_{x2}) + \Gamma(\tau_1, \tau_2, \eta, e_{y1}, e_{y2}) \end{aligned} \quad (10-50)$$

$$\begin{aligned} V^{**} &= t_9 + t_{10}(\xi - 0.5) + t_{11}(\eta - 0.5) + t_{12}(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_{13}(\eta - 0.5)^2 + t_{14}(\xi - 0.5)^3 + t_{15}(\eta - 0.5)^3 + \\ & \Gamma(h_1, h_2, \xi, p_{x1}, p_{x2}) + \Gamma(\tau_1, \tau_2, \eta, f_{y1}, f_{y2}) \end{aligned} \quad (10-51)$$

$$\begin{aligned} W^{**} &= t_1 + t_{16}(\xi - 0.5) + t_{17}(\eta - 0.5) + t_{18}(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_{19}(\eta - 0.5)^2 + \Gamma(h_1, h_2, \xi, q_{x1}, q_{x2}) + \\ & \Gamma(\tau_1, \tau_2, \eta, g_{y1}, g_{y2}) \end{aligned} \quad (10-52)$$

将式(10-50)、式(10-51)和式(10-52)代入方程(10-20), 可得  $t_k (k=1, 2, \dots, 19)$  之间 7 个关系式。

将式(10-50)、式(10-51)和式(10-52)方程(10-20)任意

2 式,可得 2 个关系矩阵:

$$\begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{y2} \\ f_{y1} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZT_{11} & -ZT_{21} \\ ZT_{21} & -ZT_{11} \\ RT_{11} & -RT_{21} \\ RT_{21} & -RT_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{y1} \\ g_{y2} \end{bmatrix} \quad (10-53)$$

$$\begin{bmatrix} o_{x1} \\ o_{x2} \\ p_{x1} \\ p_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZR_{11} & -ZR_{21} \\ ZR_{21} & -ZR_{11} \\ RR_{11} & -RR_{21} \\ RR_{21} & -RR_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \end{bmatrix} \quad (10-54)$$

补充解式(10-50)、式(10-51)和式(10-52)只有 16 个未知数。

承受两对边压力和四边剪力( $N_x, N_y, N_{xy}$ )的矩形板屈曲问题补充解与式(10-50)、式(10-51)和式(10-52)类似。

### 3. 基于经典理论的一般铺设复合材料矩形板屈曲和振动问题一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理,可将齐次解、补充解组合起来,可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \end{aligned} \quad (10-55)$$

$$\begin{aligned} U = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (Z_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (Z_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (Z_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (Z_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (T_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (T_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (T_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (T_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + U^{**}
\end{aligned}
\tag{10-56}$$

$$\begin{aligned}
V = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (R_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (R_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (R_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (R_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (S_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (S_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (S_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) -
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (S_{41k} \psi_k(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{31k} \psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + V^{**} \quad (10-57)$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5, 7)$  和补充解中的 16 个独立待定常数为待定实数常数。

实际计算中, 设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解 (10-55) ~ (10-57) 共有  $16M+16$  个未知数 ( $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5, 7)$  和 16 个补充解中独立待定常数)。对于一般铺设矩形板屈曲、振动问题, 共有 16 个独立的边界条件。将解析解代入 16 个边界条件中, 形成 16 个方程, 将所得每个方程展成  $(M+1)$  项余弦级数, 可以得到  $16M+16$  个线性代数方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \quad (10-58)$$

式中:  $K$  为  $(16M+16) \times (16M+16)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, Q_{17M}, Q_{27M}, t_1, \dots\}$$

当方程 (10-58) 有异于零的解 (即  $\{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, Q_{17M}, Q_{27M}\}$  和  $\{t_1, \dots\}$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  或  $(N_x, N_y, N_{xy})$  即为所求频率或屈曲载荷。对于屈曲问题, 需要注意的是求得载荷最小值。

## 第 11 章 考虑剪切变形的任意铺设 复合材料矩形板静力响应解析研究

对于复合材料的板壳结构,由于复合材料及其结构构造的特点,会面临各向异性和由呈层性引起的各种耦合效应,基体横向刚度小,在厚度不是很小时,需要考虑横向剪切效应。不考虑横向剪切效应的任意铺设薄板力学控制方程的未知函数为 3 个,而考虑横向剪切效应的任意铺设板力学控制方程的未知函数为 5 个,解析求解更加困难。随着技术发展,复合材料结构在工程中应用已向作主承力件方向发展,板厚增大趋势是不能完全避免的,综合考察各种耦合效应及横向剪切效应对板结构性能影响,这对于进一步提高复合材料设计水平,发展板壳力学都有重要意义。基于剪切理论的复合材料板壳理论和各向同性板壳理论一样,包括位移应变关系、内力应变关系、平衡方程、边界条件等基本方程,但由于各向异性、耦合效应和剪切变形等因素,使得任意铺设复合材料板壳理论及其有关问题的求解变得异常困难,任意铺设复合材料板壳结构解析研究很长时间无法取得实质进步。本章运用新型复级数法建立了考虑剪切变形的任意铺设复合材料矩形板横向弯曲的一般解析解,给出算例验证了所得到一般解析解的收敛性、稳定性,初步讨论了在横向载荷作用下板结构的力学响应。

## 11.1 考虑剪切变形的斜形板弯曲 问题位移型方程

假定矩形板在厚度方向不可压缩,在变形前板的法线变形后仍为一条直线,即法线在变形后方向分别为  $\Phi_x$  和  $\Phi_y$ 。板在  $xOy$  坐标面上的位移分量分别为  $u_0, v_0$  和  $w_0$ ,则板截面上任意一点的位移分量  $u, v, w$  分别为

$$\begin{cases} u = u_0 + z\Phi_x \\ v = v_0 + z\Phi_y \\ w = w_0 \end{cases} \quad (11-1)$$

有以下基本关系式:

### 1. 几何关系

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right) \\ \chi_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \chi_y = \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \\ \chi_{xy} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \Phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \Phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (11-2)$$

## 2. 物理关系

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11-3)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \Phi_y \end{bmatrix} \quad (11-4)$$

式中:  $A_{ij}B_{ij}D_{ij}$  ( $i=1,2 \quad j=1,2,6$ ) 为面内刚度系数、耦合, 刚度系数、弯曲刚度系数, 具体形式见参考文献[81]。

$$A_{44} = A/(AB - C^2), \quad A_{45} = B/(AB - C^2), \quad A_{55} = C/(AB - C^2)$$

$$A = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{44}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k, \quad B = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{55}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k,$$

$$C = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{45}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k, \quad [\Delta Q]^2 = Q_{44}^{(k)} Q_{55}^{(k)} - [Q_{45}^{(k)}]^2,$$

$$H_k = h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{h_k^5 - h_{k-1}^5}{h^4}$$

## 3. 平衡方程

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}\Phi_x + L_{14}\Phi_y + L_{15}w = 0 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}\Phi_x + L_{24}\Phi_y + L_{25}w = 0 \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}\Phi_x + L_{34}\Phi_y + L_{35}w = 0 \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}\Phi_x + L_{44}\Phi_y + L_{45}w = 0 \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}\Phi_x + L_{54}\Phi_y + L_{55}w = P \end{cases} \quad (11-5)$$

式中:  $L_{ij}(i=1,5; j=1,5)$ , 具体形式如下:

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{13} = L_{31} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{14} = L_{41} = L_{23} = L_{32} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{24} = L_{42} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{55}$$

$$L_{34} = L_{43} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{45}$$

$$L_{44} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{44}$$

$$L_{15} = -L_{51} = 0$$

$$L_{25} = -L_{52} = 0$$

$$L_{35} = -L_{53} = -A_{55} \frac{\partial}{\partial x} - A_{45} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{45} = -L_{54} = -A_{45} \frac{\partial}{\partial x} - A_{44} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{55} = A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



引入以下无量纲量：

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad U = \frac{u}{h}, \quad V = \frac{v}{h}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad p = \frac{q}{a^2}$$

这样式(11-5)可改写如下：

$$\begin{cases} LL_{11}U + LL_{12}V + LL_{13}\Phi_x + LL_{14}\Phi_y + LL_{15}W = 0 \\ LL_{21}U + LL_{22}V + LL_{23}\Phi_x + LL_{24}\Phi_y + LL_{25}W = 0 \\ LL_{31}U + LL_{32}V + LL_{33}\Phi_x + LL_{34}\Phi_y + LL_{35}W = 0 \\ LL_{41}U + LL_{42}V + LL_{43}\Phi_x + LL_{44}\Phi_y + LL_{45}W = 0 \\ LL_{51}U + LL_{52}V + LL_{53}\Phi_x + LL_{54}\Phi_y + LL_{55}W = p \end{cases} \quad (11-6)$$

$$LL_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{12} = LL_{21} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (A_{12} + A_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{13} = \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{31} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{14} = LL_{23} = \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12} + B_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{41} = LL_{32} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12} + B_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{24} = \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{42} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{33} = \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{55}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{34} = LL_{43} = \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (D_{12} + D_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{45}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{44} = \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{44}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{15} = -LL_{51} = 0$$

$$LL_{25} = -LL_{52} = 0$$

$$LL_{35} = \left( -A_{55} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{45}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a$$

$$LL_{53} = - \left( -A_{55} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{45}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{45} = \left( -A_{45} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{44}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a$$

$$LL_{54} = - \left( -A_{45} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{44}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{55} = A_{55} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{45}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{44}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

任意铺设复合材料矩形板横向弯曲问题求解可归结为求解偏微分方程组式(11-6)在横向弯曲矩形板边界条件下边值问题。

## 11.2 考虑剪切变形的斜形板弯曲 一般解析解的建立

### 1. 通解的推导

本书采用位移法求解, 设

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ V = \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ \Phi_x = \sum_{-\infty}^{\infty} C e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ \Phi_y = \sum_{-\infty}^{\infty} D e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} G e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \end{array} \right. \quad (11-7)$$

式中:  $i$  为虚数单位;  $m$  为整数;  $r$  为特征根。

将式(11-7)代入式(11-6), 当  $m$  不为 0 时, 可推得有关  $r$  的 10 次特征代数方程

$$S_{100} + S_{91}r + S_{82}r^2 + S_{73}r^3 + S_{64}r^4 + S_{55}r^5 + S_{46}r^6 + S_{37}r^7 + S_{28}r^8 + S_{19}r^9 + S_{010}r^{10} = 0 \quad (11-8)$$

式中:  $S_{kl}$  可由行列式演算而得, 具体形式略。

对于一般铺设的复合材料板, 式(11-8)有 5 对共轭复根

$$a_k \pm b_k i (k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (11-9)$$

采用第 3 章中类似的步骤, 可以推得的实数形式级数通解合写如下

$$\begin{aligned} (U, V, \Phi_x, \Phi_y, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{1km}, F_{1km}, EY_{1km}, FY_{1km}, G_{1km}) \\ & \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{2km}, F_{2km}, EY_{2km}, FY_{2km}, G_{2km}) \\ & \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{3km}, F_{3km}, EY_{3km}, FY_{3km}, G_{3km}) \\
& \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{4km}, F_{4km}, EY_{4km}, FY_{4km}, G_{4km}) \\
& \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad (11-10)
\end{aligned}$$

将式(11-10)代入式(11-6)任意4式,从基本解的独立性出发,可得到  $E_{ijm}, F_{ijm}, EY_{ijm}, FY_{ijm}, G_{ijm}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 之间的关系式。这样可得8组线性方程,用计算程序可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{bmatrix} \quad (11-11)$$

$$\begin{bmatrix} EY_{1km} \\ EY_{2km} \\ EY_{3km} \\ EY_{4km} \\ EY_{1km} \\ EY_{2km} \\ EY_{3km} \\ EY_{4km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZY_{11k} & -ZY_{21k} & ZY_{13k} & -ZY_{23k} \\ ZY_{21k} & -ZY_{11k} & ZY_{23k} & -ZY_{13k} \\ ZY_{31k} & -ZY_{41k} & ZY_{33k} & -ZY_{43k} \\ ZY_{41k} & -ZY_{31k} & ZY_{43k} & -ZY_{33k} \\ RY_{11k} & -RY_{21k} & RY_{13k} & -RY_{23k} \\ RY_{21k} & -RY_{11k} & RY_{23k} & -RY_{13k} \\ RY_{31k} & -RY_{41k} & RY_{33k} & -RY_{43k} \\ RY_{41k} & -RY_{31k} & RY_{43k} & -RY_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{bmatrix}$$

$$(11-12)$$

对于规则非对称正交铺设层合板、规则反对称层合板,上面关系矩阵不成立,解形式发生变化,我们另外给出相应解。

当  $m$  为 0 时,设

$$\begin{cases} U = U_y e^{i\eta y} \\ V = V_y e^{i\eta y} \\ \Phi_x = \Phi_{xy} e^{i\eta y} \\ \Phi_y = \Phi_{yy} e^{i\eta y} \\ W = W_y e^{i\eta y} \end{cases} \quad (11-13)$$

将式(11-13)代入式(11-6)可得控制方程及其特征根:  $\pm a_0$

本书又设

$$\begin{cases} U = \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i\pi s \xi} e^{i\pi s \eta} \\ V = \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i\pi s \xi} e^{i\pi s \eta} \\ \Phi_x = \sum_{-\infty}^{\infty} O X e^{i\pi s \xi} e^{i\pi s \eta} \\ \Phi_y = \sum_{-\infty}^{\infty} P X e^{i\pi s \xi} e^{i\pi s \eta} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i\pi s \xi} e^{i\pi s \eta} \end{cases} \quad (11-14)$$

与上面介绍类似,可得有关  $s$  的特征方程式(11-15)、5 对不等共轭虚根  $c_k \pm d_k i$  ( $k=1,2,3,4,5$ ) 和关系矩阵:

$$\begin{aligned} & T_{100}s^{10} + T_{91}s^9 + T_{82}s^8 + T_{73}s^7 + T_{64}s^6 + T_{55}s^5 + \\ & T_{46}s^4 + T_{37}s^3 + T_{28}s^2 + T_{19}s + T_{010} = 0 \end{aligned} \quad (11-15)$$

$$\begin{bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix} \quad (11-16)$$

$$\begin{bmatrix} OX_{1kn} \\ OX_{2kn} \\ OX_{3kn} \\ OX_{4kn} \\ PX_{1kn} \\ PX_{2kn} \\ PX_{3kn} \\ PX_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX_{11k} & -TX_{21k} & TX_{13k} & -TX_{23k} \\ TX_{21k} & -TX_{11k} & TX_{23k} & -TX_{13k} \\ TX_{31k} & -TX_{41k} & TX_{33k} & -TX_{43k} \\ TX_{41k} & -TX_{31k} & TX_{43k} & -TX_{33k} \\ SX_{11k} & -SX_{21k} & SX_{13k} & -SX_{23k} \\ SX_{21k} & -SX_{11k} & SX_{23k} & -SX_{13k} \\ SX_{31k} & -SX_{41k} & SX_{33k} & -SX_{43k} \\ SX_{41k} & -SX_{31k} & SX_{43k} & -SX_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix}$$

(11-17)

同样可得对应的实数形式级数通解合写如下:

$$\begin{aligned}
 (U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{1kn}, P_{1kn}, OX_{1kn}, PX_{1kn}, Q_{1kn}) \\
 &\quad \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{2kn}, P_{2kn}, OX_{2kn}, PX_{2kn}, Q_{2kn})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{3kn}, P_{3kn}, OX_{3kn}, PX_{3kn}, Q_{3kn}) \\
& \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{4kn}, P_{4kn}, OX_{4kn}, PX_{4kn}, Q_{4kn}) \\
& \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \quad (11-18)
\end{aligned}$$

当  $n$  为 0 时, 可设

$$\begin{aligned}
U &= U_x e^{r\xi} \\
V &= V_x e^{r\xi} \\
\Phi_x &= \Phi_{xx} e^{r\xi} \\
\Phi_y &= \Phi_{yx} e^{r\xi} \\
W &= W_x e^{r\xi}
\end{aligned} \quad (11-19)$$

同样将式(11-19)代入式(11-6), 亦可得控制方程及其特征根:

$\pm c_0$ 。

从线性偏微分方程解得可叠加性出发, 在式(11-10)和式(11-18)基础上补充多项式及特解, 可得一般解析解:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1km} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
& t_1 + t_2 (\xi - 0.5)^2 + t_3 (\eta - 0.5)^2 + t_4 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + \\
& t_5 (\xi - 0.5) + t_6 (\eta - 0.5) + W_{y1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + \\
& W_{y2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + W_{x1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + W_{x2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + W^{**} \\
& (11 - 20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& t_7 + t_8 (\xi - 0.5) + t_9 (\eta - 0.5) + t_{10} (\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{11} (\eta - 0.5)^2 + t_{12} (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + U_{y1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + \\
& U_{y2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + U_{x1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + U_{x2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + U^{**} \\
& \hspace{15em} (11 - 21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_{13} + t_{14}(\xi - 0.5) + t_{15}(\eta - 0.5) + t_{16}(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{17}(\eta - 0.5)^2 + t_{18}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + \\
& V_{y1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + V_{y2} \frac{\sinh a_0(1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + \\
& V_{x1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + V_{x2} \frac{\sinh c_0(1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + V^{**} \quad (11 - 22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( ZY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. ZY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( ZY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. ZY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( ZY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. ZY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( ZY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k(1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. ZY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( TX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k(1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. TX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( TX_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. TX_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( TX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. TX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( TX_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. TX_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& t_{19} + t_{20} (\xi - 0.5) + t_{21} (\eta - 0.5) + \Phi_{xy1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + \\
& \Phi_{xy2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{xx1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\
& \Phi_{xx2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + \Phi_x^{**} \tag{11 - 23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( RY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. RY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( RY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& RY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( RY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& RY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( RY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& RY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( SX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& SX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( SX_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& SX_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( SX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& SX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_{21} + t_{22}(\xi - 0.5) + t_{23}(\eta - 0.5) + \\
& \Phi_{\gamma^1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma^2} \frac{\sinh a_0(1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma^1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\
& \Phi_{\gamma^2} \frac{\sinh c_0(1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + \Phi_{\gamma}^{**} \quad (11-24)
\end{aligned}$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于横向弯曲问题, 本节引入势函数  $\Phi$ , 引进微分算子  $D_0$ , 它是以算子  $L_{ij}$  组成得  $5 \times 5$  行列式, 并令  $D_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 表示给该行列式的代数余子式。使

$$U = D_{51}\Phi \quad V = D_{52}\Phi \quad \Phi_x = D_{53}\Phi \quad \Phi_y = D_{54}\Phi \quad W = D_{55}\Phi \quad (11-25)$$

依照线性代数理论, 基本微分方程可以写成

$$D_0 \Phi = p \quad (11-26)$$

展开为

$$\begin{aligned}
& SS_{100} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^{10}} + SS_{91} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^9 \partial \eta} + SS_{82} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^8 \partial \eta^2} + SS_{73} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta^3} + SS_{64} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^4} + \\
& SS_{55} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^5} + SS_{46} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^6} + SS_{37} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^7} + SS_{28} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^8} + SS_{19} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi \partial \eta^9} + \\
& SS_{010} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \eta^{10}} + SS_{80} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta} + SS_{62} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} + SS_{53} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^3} + \\
& SS_{44} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} + SS_{35} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^6} + SS_{17} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi \partial \eta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \eta^8} = p \quad (11-27)
\end{aligned}$$

对于均布载荷, 本书选取

$$\Phi = \frac{p}{81216} \left( \frac{(\xi - 0.5)^8}{SS_{80}} + \frac{(\xi - 0.5)^4(\eta - 0.5)^4}{SS_{44}} + \frac{(\eta - 0.5)^8}{SS_{08}} \right)$$

从而可推出各位移特解。

### 3. 求解模式

将式(11-20)、式(11-21)、式(11-22)、式(11-23)和式(11-24)中多项式+梁函数补充代入式(11-6)可建立23个独立方程。在实际计算中,不可能取无穷大,设最大取 $M$ ,这样一般解析解式(11-20)~式(11-24)共有 $20M+20$ 个独立未知数。对于任意铺设矩形板,每边有5个边界条件,共有20个边界条件。将一般解析解代入20个边界条件中,形成20个方程,将所得每个方程展成 $M$ 项正弦级数。根据正弦级数的正交性,可以得到 $20M$ 个线性代数方程。在每个板角可建立有关于位移(如挠度、转角、面内位移)、内力(剪力弯矩扭矩等)共5个角点条件,这样共建立 $20M+20$ 个方程,可以求解 $20M+20$ 个未知数,横向弯曲问题得解。

## 11.3 考虑剪切变形的斜形板弯曲解析解数值验证及结构计算结果总体分析

本章计算涉及具有两种边界条件任意铺设层合板:简支固定(SSSS)层合板,固支固定(CCCC)层合板。具体边界条件如下。

简支固定层合板边界条件为:

$$\xi = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad M_x = 0 \quad \Phi_y = 0 \quad W = 0$$

$$\eta = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad M_y = 0 \quad \Phi_x = 0 \quad W = 0$$

固支固定层合板边界条件为:

$$\xi = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad \Phi_x = 0 \quad \Phi_y = 0 \quad W = 0$$

$$\eta = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad \Phi_x = 0 \quad \Phi_y = 0 \quad W = 0$$

### 1. 层合板位移总体分布及边界收敛情况验证

为了考查本书解对边界条件收敛性,本书针对两层 $[0/15]_T$ 铺设层合板在均布载荷 $P$ 作用下的横向弯曲进行计算。

所选复合材料常数为

$$E_1 = 144.79\text{GPa} \quad E_2 = 9.65\text{GPa} \quad G_{12} = G_{13} = 4.14\text{GPa}$$

$$G_{23} = 3.312\text{GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

结构几何、载荷参数为

$$a = b = 1\text{m} \quad h = 0.1\text{m} \quad P = 10^4\text{N/m}^2$$

为了显示任意铺设层合板位移总体分布情况,下面给出表 11-1。

表 11-1  $[0/15]_T$  铺设 CCCC 层合板挠度  $w \times 10^5$  分布

$\xi \backslash \eta$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.259	0.410	0.415	0.375	0.197	0.000
0.5	0.000	0.408	0.736	0.740	0.736	0.408	0.000
0.8	0.000	0.197	0.375	0.415	0.410	0.259	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

为了考察本书解的收敛性,本书又针对四边简支固定层合板(SSSS)、四边固支固定层合板(CCCC)给出验证算例,板厚  $h$  改为 0.15m,其余结构载荷参数同上,结果反映在表 11-2 中。

表 11-2  $[0/15]_T$  铺设层合板挠度随  $M$  变化趋势

$M$	4	8	16	24	30
SSSS 板中心 $w$	$5.428 \times 10^{-6}$	$5.430 \times 10^{-6}$	$5.430 \times 10^{-6}$	$5.431 \times 10^{-6}$	$5.431 \times 10^{-6}$
CCCC 板中心 $w$	$2.989 \times 10^{-6}$	$2.985 \times 10^{-6}$	$2.985 \times 10^{-6}$	$2.985 \times 10^{-6}$	$2.985 \times 10^{-6}$

从表 11-1 和表 11-2 可看出,本书解可以满足边界条件,而且随着  $M$  增大本书解迅速收敛,当  $M$  取 4 时挠度值与  $M$  取 30 所得挠度值已相差不大,在  $M$  增大过程中级数解亦保持稳定。这表明本书解可以实际解析分析任意铺设复合材料板结构的静力学问题。

## 2. 层合板位移对称性及铺层对称性分析

通过对复合材料、边界条件和载荷对称情况综合分析,可以得到如下结论:对铺设方式一定的复合材料层合板,当复合材料层合板材料、边界条件和载荷呈中心对称时,具有层合板挠度呈中心对称,而面



内位移  $U$ 、 $V$  及转角函数  $\Phi_x$ 、 $\Phi_y$  呈反中心对称,相应地各内力内力矩也呈中心对称,具体表示为

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) &= W(1 - \xi, -\eta) \\ U(\xi, \eta) &= -U(1 - \xi, -\eta) \\ V(\xi, \eta) &= -V(1 - \xi, -\eta) \\ \Phi_x(\xi, \eta) &= -\Phi_x(1 - \xi, -\eta) \\ \Phi_y(\xi, \eta) &= -\Phi_y(1 - \xi, -\eta) \end{aligned}$$

表 11-1 反映了上述位移对称性,同样在数值计算中引入对称性结论,可有效地降低计算量。

与经典理论的任意铺设层合薄板类似,层合板物理量与计算所选坐标系亦无关,以此通过坐标转换可以发现:  $[\theta_1/\theta_2/\cdots/\theta_N]_T$  铺设层合板与  $[90^\circ - \theta_1/90^\circ - \theta_2/\cdots/90^\circ - \theta_N]_T$  铺设层合板位移对称。为显示层合板铺层对称性,选择数种铺设方式的四边固支固定层合板进行比较计算,结构参数、载荷参数所选复合材料常数为

$$\begin{aligned} E_1 &= 144.79 \text{ GPa} & E_2 &= 9.65 \text{ GPa} & G_{12} &= G_{13} = 4.14 \text{ GPa} \\ G_{23} &= 3.312 \text{ GPa} & \nu_{12} &= 0.3 \end{aligned}$$

结构几何、载荷参数为

$$a = b = 1 \text{ m} \quad h = 0.1 \text{ m} \quad P = 10^4 \text{ N/m}^2$$

所得层合板中心挠度  $w$  的结果反映在表 11-3 中。表中具体反映了层合板铺层对称性。

表 11-3 铺层对称性验证计算结果

铺层方式	$[0/10]_T$	$[90/80]_T$	$[0/20]_T$	$[90/70]_T$	$[0/40]_T$	$[90/50]_T$
$w \times 10^{-5}$	0.1871	0.1871	0.6547	0.6547	0.7647	0.7647

### 3. 横向剪切效应对任意铺设层合板影响分析

横向剪切效应对任意铺设层合板静力学特性的影响是肯定的,在任意铺设情况下其程度多大需要认真研究。本书针对  $[0/15^\circ]_T$  任意铺设 CCCC 层合板、SSSS 层合板进行计算分析,逐渐减小  $h/a$ ,将所得层合板中心  $(0.5, 0.5)$  处挠度按一阶剪切理论(FSDT)计算值与相应

经典理论 CLT 计算值比较,据此探讨横向剪切效应对层合板力学特性的影响。计算时所选复合材料常数为

$$E_1 = 144.79 \text{ GPa} \quad E_2 = 9.65 \text{ GPa} \quad G_{12} = G_{13} = 4.14 \text{ GPa} \\ G_{23} = 3.312 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

结构几何、载荷参数为

$$a = b = 1 \text{ m} \quad h = 0.1 \text{ m} \quad P = 10^4 \text{ N/m}^2$$

从表 11-4 和表 11-5 中发现横向剪切对任意铺设层合板静力学特性有不同程度的影响,而且板越厚即  $h/a$  越大,横向剪切影响越大,表 11-4 显示当  $h/a$  为 0.2 时 SSSS 板的 FSDT 值已为 CLT 挠度值两倍多(而对于 CCCC 板相应数值已达到 4 倍多),即使  $h/a$  已小到 0.05,挠度 FSDT 值比 CLT 挠度值大 10% 以上,但板较薄情况下挠度 FSDT 值与 CLT 挠度值可较为,其相对误差在 10% 以内,考虑到按剪切理论计算工作量较大,在板较薄时,经典理论也可以用来近似分析任意铺设层合板。鉴于经典理论低估挠度,在工程计算中可能给出危险结果,当板较厚时( $h/a$  大于 0.02),层合板计算应该采用剪切理论进行。分析表 11-4 和表 11-5 可发现不同边界条件的层合板受横向剪切影响程度是不同的,边界约束较紧(如本书中的四边固支固定边界)板受横向剪切影响程度大于边界约束较松(如本书中的四边简支固定边界)板,这与层合圆柱壳及对称角铺设层合板所得结论类似。

表 11-4  $[0/15]_T$  铺设 SSSS 板 FDST 挠度值与 CLT 挠度值

$\begin{matrix} h/a \\ w \end{matrix}$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
FSDT	$2.954 \times 10^{-6}$	$1.440 \times 10^{-5}$	$9.569 \times 10^{-5}$	$1.409 \times 10^{-3}$	$1.117 \times 10^{-2}$
CLT	$1.331 \times 10^{-6}$	$1.065 \times 10^{-5}$	$8.516 \times 10^{-5}$	$1.331 \times 10^{-3}$	$1.065 \times 10^{-2}$

表 11-5  $[0/15]_T$  铺设 CCCC 板 FDST 挠度值与 CLT 挠度值

$\begin{matrix} h/a \\ w \end{matrix}$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
FSDT	$1.871 \times 10^{-6}$	$6.255 \times 10^{-5}$	$2.979 \times 10^{-5}$	$0.371 \times 10^{-3}$	$0.286 \times 10^{-2}$
CLT	$0.3484 \times 10^{-6}$	$2.787 \times 10^{-5}$	$2.230 \times 10^{-5}$	$0.348 \times 10^{-3}$	$0.279 \times 10^{-2}$

#### 4. 任意铺设层合板铺设角、铺层敏感性分析

在实际工艺制作中纤维取向的微量差异对层合板力学性能会有一些影响,其程度多大是工程界所关心的。本章针对 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ-\theta]_T$ 任意铺设两端简支固定层合板,逐渐减小 $\theta$ ,将所得层合板中心 $(0.5, 0)$ 处挠度计算结果与 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$ 铺设层合板中心 $(0.5, 0.5)$ 相应值比,据此探讨铺设角微小变化及由此带来铺设方式的变异对层合板力学特性的影响。所选复合材料常数为

$E_1=40\text{GPa}$   $E_2=1\text{GPa}$   $G_{12}=G_{13}=0.6\text{GPa}$   $G_{23}=0.5\text{GPa}$   $\nu_{12}=0.25$   
结构几何、载荷参数为

$$a=b=1\text{m} \quad h=0.1\text{m} \quad P=10^4\text{N/m}^2$$

表 11-6  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ-\theta]_T$  铺设层合板中心挠度与  
 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$  层合板计算结果比较

$\theta$	5	4	2	1	0.2	0.0
$W$	3.884	3.883	3.881	3.881	3.881	3.8807*
注: 值按各向异性厚板理论计算而得						

从表 11-6 发现铺设角 $\theta$ 小量改变对层合板位移影响不大,而且 $\theta$ 越小由此带来的板刚度差异越小,而且铺设角 $\theta$ 逼近 0 时,表中显示的 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ-\theta]_T$ 铺设层合板中心挠度已逼近 $\theta$ 为 0 的 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_T$ 层合板相应值,这从另一侧面验证了本书解的正确性。

## 11.4 基于一阶剪切理论的一般铺设复合材料 矩形板屈曲和振动问题解析

基于一阶剪切理论的一般角铺设复合材料矩形板屈曲和振动问题控制方程合写为下式:

$$LL_{11}U + LL_{12}V + LL_{13}\Phi_x + LL_{14}\Phi_y + LL_{15}W = 0$$

$$LL_{21}U + LL_{22}V + LL_{23}\Phi_x + LL_{24}\Phi_y + LL_{25}W = 0$$

$$LL_{31}U + LL_{32}V + LL_{33}\Phi_x + LL_{34}\Phi_y + LL_{35}W = 0$$

$$LL_{41}U + LL_{42}V + LL_{43}\Phi_x + LL_{44}\Phi_y + LL_{45}W = 0$$

$$LL_{51}U + LL_{52}V + LL_{53}\Phi_x + LL_{54}\Phi_y + LL_{55}W = 0$$

(11 - 28)

式中:  $N_x, N_y, N_{xy}$  为板中面单位长度上  $x, y$  方向压力载荷、剪力载荷,  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。对于屈曲问题, 方程(11 - 28)中要舍去  $\omega$ 。对于振动问题, 方程(11 - 28)要舍去  $N_x, N_y, N_{xy}$ 。

$$LL_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{12} = LL_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (A_{12} + A_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{13} = \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{31} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{14} = LL_{23} = \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12} + B_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{41} = LL_{32} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12} + B_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{24} = \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{42} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{26}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{22}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{33} = \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{16}\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{66}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{55}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{34} = LL_{43} = \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (D_{12} + D_{66})\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{26}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{45}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{44} = \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2D_{26} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + D_{22} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_{44} \alpha^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{15} = -LL_{51} = 0$$

$$LL_{25} = -LL_{52} = 0$$

$$LL_{35} = \left( -A_{55} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{45} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a$$

$$LL_{53} = - \left( -A_{55} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{45} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{45} = \left( -A_{45} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{44} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a$$

$$LL_{54} = - \left( -A_{45} \frac{\partial}{\partial \xi} - A_{44} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{55} = A_{55} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2A_{45} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + A_{44} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + N_x \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$N_y \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho a^2 \omega^2$$

求解过程与问题相似。

### 1. 齐次解

设方程(11-28) 有如下齐次解:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\sigma\xi} \\ U &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\eta) e^{im\sigma\xi} \\ V &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(\eta) e^{im\sigma\xi} \\ \Phi_x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{ym}(\eta) e^{im\sigma\xi} \\ \Phi_y &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{ym}(\eta) e^{im\sigma\xi} \end{aligned} \quad (11-29)$$

式中:  $i^2 = 1$ 。

设

$$\begin{aligned}
 f_m(\eta) &= iGe^{i\pi\eta r} \\
 g_m(\eta) &= Ee^{i\pi\eta r} \\
 h_m(\eta) &= Fe^{i\pi\eta r} \\
 g_{ym}(\eta) &= EYe^{i\pi\eta r} \\
 h_{ym}(\eta) &= FYe^{i\pi\eta r}
 \end{aligned} \tag{11-30}$$

式中:  $m$  为非 0 整数。  $G$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $EY$  和  $FY$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

为了使后续表述更加紧凑,引入如下标注:

$$\begin{aligned}
 DL_{11} &= (m\pi)^2 (A_{11} + 2A_{16}\alpha r + A_{66}\alpha^2 r^2) \\
 DL_{12} &= DL_{21} = (m\pi)^2 (A_{16} + (A_{12} + A_{66})\alpha r + A_{26}\alpha^2 r^2) \\
 DL_{13} &= (m\pi)^2 (B_{11} + 2B_{16}\alpha r + B_{66}\alpha^2 r^2) \frac{1}{h} \\
 DL_{31} &= (m\pi)^2 (B_{11} + 2B_{16}\alpha r + B_{66}\alpha^2 r^2) \\
 DL_{14} &= DL_{23} = (m\pi)^2 (B_{16} + (B_{12} + B_{66})\alpha r + B_{26}\alpha^2 r^2) \frac{1}{h} \\
 DL_{41} &= DL_{32} = (m\pi)^2 (B_{16} + (B_{12} + B_{66})\alpha r + B_{26}\alpha^2 r^2) \\
 DL_{22} &= (m\pi)^2 (A_{66} + 2A_{26}\alpha r + A_{22}\alpha^2 r^2) \\
 DL_{24} &= (m\pi)^2 (B_{66} + 2B_{26}\alpha r + B_{22}\alpha^2 r^2) \frac{1}{h} \\
 DL_{42} &= (m\pi)^2 (B_{66} + 2B_{26}\alpha r + B_{22}\alpha^2 r^2) \\
 DL_{33} &= (m\pi)^2 \left( D_{11} + 2D_{16}\alpha r + D_{66}\alpha^2 r^2 + \frac{A_{55}a^2}{(m\pi)^2} \right) \frac{1}{h} \\
 DL_{34} &= DL_{43} = (m\pi)^2 \left( D_{16} + (D_{12} + D_{66})\alpha r + D_{26}\alpha^2 r^2 + \frac{A_{45}a^2}{(m\pi)^2} \right) \frac{1}{h}
 \end{aligned}$$

$$DL_{44} = (m\pi)^2 \left( D_{66} + 2D_{26}\alpha r + D_{22}\alpha^2 r^2 + \frac{A_{44}\alpha^2}{(m\pi)^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$DL_{15} = -DL_{51} = 0$$

$$DL_{25} = -DL_{52} = 0$$

$$DL_{35} = (A_{55} + A_{45}\alpha r) a(m\pi)$$

$$DL_{53} = (m\pi)(-A_{55} - A_{45}\alpha r) \frac{a}{h}$$

$$DL_{45} = (A_{45} + A_{44}\alpha) a(m\pi)$$

$$DL_{54} = (-A_{45} - A_{44}\alpha r) \frac{a}{h}$$

$$DL_{55} = -[(A_{55} + 2A_{45}\alpha r + A_{44}\alpha^2 r^2)(m\pi)^2 + (N_x + 2N_{xy}\alpha r + N_y\alpha^2 r^2)(m\pi)^2 + \rho a^2 \omega^2]$$

将式(11-29)和式(11-30)代入方程(11-28)可得方程组:

$$[DL_{kl}]_{5 \times 5} \begin{bmatrix} E \\ F \\ EY \\ FY \\ G \end{bmatrix} = 0 \quad (11-31)$$

特征方程可由下式推出:  $\det[DL_{kj}]_{5 \times 5} = 0$ 。

特征方程为 10 阶代数方程:

$$SY_{100} + SY_{91}r + SY_{82}r^2 + SY_{73}r^3 + SY_{64}r^4 + SY_{55}r^5 + SY_{46}r^6 + SY_{37}r^7 + SY_{28}r^8 + SY_{19}r^9 + SY_{010}r^{10} = 0 \quad (11-32)$$

式中:  $r_k, r_{k+1} (k=1, 3, 5, 7, 9)$  是  $m$  的函数。 $SY_{100}, \dots, SY_{010}$  具体形式复杂, 本节略。

采取类似步骤,  $(U, V, \Phi_x, \Phi_y, W)$  一组齐次解可表示为实数级数

形式:

$$\begin{aligned}
 (U, V, \Phi_x, \Phi_y, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{1km}, F_{1km}, EY_{1km}, FY_{1km}, G_{1km}) \\
 & \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{2km}, F_{2km}, EY_{2km}, FY_{2km}, G_{2km}) \\
 & \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{3km}, F_{3km}, EY_{3km}, FY_{3km}, G_{3km}) \\
 & \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{4km}, F_{4km}, EY_{4km}, FY_{4km}, G_{4km}) \\
 & \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \quad (11-33)
 \end{aligned}$$

式中:  $E_{jkm}, F_{jkm}, EY_{jkm}, FY_{jkm}, G_{jkm}$  ( $j=1,2,3,4,5, k=1,3,5,7,9$ ) 为待定实数常数。

将式(11-33)代入式(11-28)任意4个方程式中,可得类似式(11-11)和式(11-12)关系矩阵。

考虑一般情况,再设

$$\begin{aligned}
 W^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(\xi) e^{in\sigma\eta} \\
 U^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} o_n(\xi) e^{in\sigma\eta} \\
 V^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(\xi) e^{in\sigma\eta} \quad (11-34) \\
 \Phi_x^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} o_{xn}(\xi) e^{in\sigma\eta} \\
 \Phi_y^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{yn}(\xi) e^{in\sigma\eta}
 \end{aligned}$$

设



$$\begin{aligned}
o_n &= Oe^{i\pi n\xi s} \\
p_n &= Pe^{i\pi n\xi s} \\
o_{xn} &= OXe^{i\pi n\xi s} \\
p_{xn} &= OYe^{i\pi n\xi s} \\
q_n &= Qe^{i\pi n\xi s}
\end{aligned} \tag{11-35}$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P, OX, OY$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

类似地, 可得另一个特征方程(11-36)、10 个特征根  $s_k, s_{k+1}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9$ ), 另一组齐次解  $W^*, U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*$ , 2 个系数关系矩阵式(11-17)和式(11-18):

$$\begin{aligned}
&SX_{100}s^{10} + SX_{91}s^9 + SX_{82}s^8 + SX_{73}s^7 + SX_{64}s^6 + SX_{55}s^5 + SX_{46}s^4 + \\
&SX_{37}s^3 + SX_{28}s^2 + SX_{19}s + SX_{010} = 0
\end{aligned} \tag{11-36}$$

$$(U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) =$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{1kn}, P_{1kn}, OX_{1kn}, PX_{1kn}, Q_{1kn}) \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{2kn}, P_{2kn}, OX_{2kn}, PX_{2kn}, Q_{2kn}) \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{3kn}, P_{3kn}, OX_{3kn}, PX_{3kn}, Q_{3kn}) \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{4kn}, P_{4kn}, OX_{4kn}, PX_{4kn}, Q_{4kn}) \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)
\end{aligned} \tag{11-37}$$

### 11.2.2 补充解

补充解可以根据常微分方程理论求得。

#### 振动问题

对于振动问题, 方程(11-28)中的  $N_x, N_y$  和  $N_{xy}$  为 0。

设

$$\begin{aligned}
U(\eta) &= e_y e^{\tau\eta} \\
V(\eta) &= f_y e^{\tau\eta} \\
\Phi_x(\eta) &= ye_y e^{\tau\eta} \\
\Phi_y(\eta) &= yf_y e^{\tau\eta} \\
W(\eta) &= g_y e^{\tau\eta}
\end{aligned} \tag{11-38}$$

式中:  $g_y, e_y, f_y, ye_y$  和  $yf_y$  为实数待定常数,  $\tau$  为特征根。

将式 (11-38) 代入 (11-28) 可得下式:

$$\tau^4(SSY_{010} \tau^6 + SSY_{080} \tau^4 + SSY_{06} \tau^2 + SSY_{04}) = 0 \tag{11-39}$$

$$SSY_{010} \tau^6 + SSY_{08} \tau^4 + SSY_{06} \tau^2 + SSY_{04} = 0 \tag{11-40}$$

式中:  $SSY_{010}, \dots, SSY_{04}$  形式复杂, 具体形式略。

设

$$\begin{aligned}
U(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\
V(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\
\Phi_x(\xi) &= x o_x e^{h\xi} \\
\Phi_y(\xi) &= x p_x e^{h\xi} \\
W(\xi) &= q_x e^{h\xi}
\end{aligned} \tag{11-41}$$

式中:  $o_x, p_x, q_x, xp_x$  和  $xq_x$  为实数待定常数,  $h$  为特征根。

将式 (11-41) 代入方程 (11-28) 可得

$$h^4(SSX_{100} h^6 + SSX_{80} h^4 + SSX_{60} h^2 + SSX_{40}) = 0 \tag{11-42}$$

$$SSX_{100} h^6 + SSX_{80} h^4 + SSX_{60} h^2 + SSX_{40} = 0 \tag{11-43}$$

式中:  $SSX_{100}, \dots, SSX_{010}$  形式复杂, 具体形式略。

根据常微分方程理论, 补充解可得:

$$\begin{aligned}
U^{**} &= t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + \\
&\quad \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, e_{y_k}, e_{y_{k+1}}) +
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{zk}, o_{zk+1}) \quad (11-44)$$

$$\begin{aligned} V^{**} = & t_5 + t_6(\xi - 0.5) + t_7(\eta - 0.5) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{zk}, p_{zk+1}) \end{aligned} \quad (11-45)$$

$$\begin{aligned} \Phi_x^{**} = & t_8 + t_9(\xi - 0.5) + t_{10}(\eta - 0.5) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, ye_{yk}, ye_{yk+1}) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xo_{zk}, xo_{zk+1}) \end{aligned} \quad (11-46)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^{**} = & t_{11} + t_{12}(\xi - 0.5) + t_{13}(\eta - 0.5) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, yf_{yk}, yf_{yk+1}) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xp_{zk}, xp_{zk+1}) \end{aligned} \quad (11-47)$$

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, g_{yk}, g_{yk+1}) + \\ & \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{zk}, q_{zk+1}) \end{aligned} \quad (11-48)$$

式中:  $(g_{yk}, g_{yk+1}, q_{zk}, q_{zk+1}, k=1, 3, 5)$  为待定常数,  $\tau_k, \tau_{k+1} (k=1, 3, 5)$  是方程(11-40)的根。  $h_k, h_{k+1} (k=1, 3, 5)$  是方程(11-43)的根。

将式(11-44)~式(11-48)中的多项式部分代入方程(11-28), 可得  $t_k (k=1, 2, \dots, 13)$  之间 5 个关系方程式。

将式(11-44)~式(11-48)中  $\Gamma$  函数部分代入方程(11-28)任意 4 式, 可得 2 个关系矩阵。  $e_{yk}, e_{yk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, ye_{yk}, ye_{yk+1}, yf_{yk}, yf_{yk+1}$  可由  $g_{yk}, g_{yk+1} (k=1, 3, 5)$  推得;  $o_{zk}, o_{zk+1}, p_{zk}, p_{zk+1}, xo_{zk}, xo_{zk+1}, xp_{zk}, xp_{zk+1}$  可由  $q_{zk}, q_{zk+1} (k=1, 3, 5)$  推得。

这样式(11-44) ~ (11-48)只有 20 个独立待定常数。

承受两对边均布压力( $N_x, N_y$ )的矩形板屈曲问题

设

$$\begin{aligned} U(\eta) &= e_y e^{\tau\eta} \\ V(\eta) &= f_y e^{\tau\eta} \\ \Phi_x(\eta) &= ye_y e^{\tau\eta} \\ \Phi_y(\eta) &= yf_y e^{\tau\eta} \\ W(\eta) &= g_y e^{\tau\eta} \end{aligned} \quad (11-49)$$

式中:  $g_y, e_y, f_y, ye_y$  和  $yf_y$  为实数待定常数,  $\tau$  为特征根。

将式(11-49)代入式(11-28) 可得:

$$\tau^4(SS_{010} \tau^6 + SS_{08} \tau^4 + SS_{06} \tau^2) = 0 \quad (11-50)$$

$$SS_{010} \tau^4 + SS_{08} \tau^2 + SS_{06} = 0 \quad (11-51)$$

设

$$\begin{aligned} U(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\ V(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ \Phi_x(\xi) &= xo_x e^{h\xi} \\ \Phi_y(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ W(\xi) &= q_x e^{h\xi} \end{aligned} \quad (11-52)$$

式中:  $o_x, p_x, q_x, xp_x$  和  $xq_x$  为实数待定常数,  $h$  为特征根。

将式(11-52) 代入方程(11-28) 可得

$$h^4(SS_{100}h^6 + SS_{80}h^4 + SS_{60}h^2) = 0 \quad (11-53)$$

$$SS_{100}h^4 + SS_{80}h^2 + SS_{60} = 0 \quad (11-54)$$

根据常微分方程理论, 补充解可得:

$$\begin{aligned} U^{**} &= t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_6(\eta - 0.5)^2 + t_7(\xi - 0.5)^3 + t_8(\eta - 0.5)^3 + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, e_{yk}, e_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{xk}, o_{xk+1}) \end{aligned} \quad (11-55)$$

$$\begin{aligned}
V^{**} = & t_9 + t_{10}(\xi - 0.5) + t_{11}(\eta - 0.5) + t_{12}(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{13}(\eta - 0.5)^2 + t_{14}(\xi - 0.5)^3 + t_{15}(\eta - 0.5)^3 + \\
& \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{xk}, p_{xk+1})
\end{aligned} \quad (11-56)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x^{**} = & t_{20} + t_{21}(\xi - 0.5) + t_{22}(\eta - 0.5) + \\
& \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, ye_{yk}, ye_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xo_{xk}, xo_{xk+1})
\end{aligned} \quad (11-57)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y^{**} = & t_{23} + t_{24}(\xi - 0.5) + t_{25}(\eta - 0.5) + \\
& \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, yf_{yk}, yf_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xp_{xk}, xp_{xk+1})
\end{aligned} \quad (11-58)$$

$$\begin{aligned}
W^{**} = & t_1 + t_{16}(\xi - 0.5) + t_{17}(\eta - 0.5) + t_{18}(\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{19}(\eta - 0.5)^2 + \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, g_{yk}, g_{yk+1}) + \\
& \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{xk}, q_{xk+1})
\end{aligned} \quad (11-59)$$

式中:  $(g_{yk}, g_{yk+1}, q_{xk}, q_{xk+1}, k=1, 3)$  为待定常数,  $\tau_k, \tau_{k+1} (k=1, 3)$  是方程(11-51)的根。 $h_k, h_{k+1} (k=1, 3)$  是方程(11-54)的根。

将式(11-55)~式(11-59)中的多项式部分代入方程(11-28), 可得  $t_k (k=1, 2, \dots, 25)$  之间 13 个关系方程式。

将式(11-55)~式(11-59)中  $\Gamma$  函数部分代入方程(11-28)任意 4 式, 可得 2 个关系矩阵。 $e_{yk}, e_{yk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, ye_{yk}, ye_{yk+1}, yf_{yk}, yf_{yk+1}$  可由  $g_{yk}, g_{yk+1} (k=1, 3)$  推得;  $o_{xk}, o_{xk+1}, p_{xk}, p_{xk+1}, xo_{xk}, xo_{xk+1}, xp_{xk}, xp_{xk+1}$  可由  $q_{xk}, q_{xk+1} (k=1, 3)$  推得。

这样式(11-55)~式(11-59)只有 20 个独立待定常数。

承受两对边均布压力、四边剪切力  $(N_x, N_y, N_{xy})$  的矩形板屈曲问题补充解与承受两对边均布压力  $(N_x, N_y)$  的矩形板屈曲问题补充解

类似。

### 3. 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理,可将齐次解、补充解组合起来,可得到以  $\xi$ 、 $\eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
 & Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \quad (11-60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (Z_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & Z_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (Z_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & Z_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (Z_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & Z_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (Z_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
 & Z_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (T_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
 & T_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (T_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (T_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& T_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (T_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& T_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + U^{**} \quad (11 - 61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (R_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& R_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (R_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& R_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (R_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& R_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (R_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& R_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (S_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& S_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (S_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& S_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (S_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (S_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& S_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + V^{**} \quad (11 - 62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (ZY_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& ZY_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (ZY_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& ZY_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (ZY_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& ZY_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (ZY_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\
& ZY_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (TX_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& TX_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (TX_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& TX_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (TX_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\
& TX_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (TX_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) +
\end{aligned}$$



$$TX_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \Phi_x^{**} \quad (11 - 63)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (RY_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & RY_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (RY_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & RY_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (RY_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & RY_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (RY_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & RY_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (SX_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & SX_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (SX_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & SX_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (SX_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & SX_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (SX_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \\ & SX_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + \Phi_y^{**} \quad (11 - 64) \end{aligned}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1,3,5,7,9)$  和补充解中 20 个独立待定常数一般为解析解中实数待定常数。

实际计算中, 设  $m = n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解 (11-60) ~ (11-64) 共有  $20M + 20$  个未知数,  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9$ ) 和补充解中 20 个独立待定常数。对于基于一阶剪切理论的一般铺设矩形板屈曲、振动问题, 共有 20 个独立的边界条件。将解析解代入 20 个边界条件中, 形成 20 个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数; 在四个角点  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ , 根据该处挠度、转角、弯矩或综合剪力平衡条件可有 20 个角点条件, 又可建立 20 个线性方程, 这样总共  $20M + 20$  个线性代数方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \quad (11-65)$$

式中:  $K$  为  $(20M + 20) \times (20M + 20)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{19M}, G_{23M}, Q_{19M}, Q_{29M}, t_1, t_2, \dots, q_{xk}, q_{xk+1}\}$$

当方程 (11-65) 有异于零的解 (即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9$ ) 与  $(t_1, t_2, \dots, q_{xk}, q_{xk+1})$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  或  $(N_x, N_y, N_{xy})$  即为所求频率或屈曲载荷。对于屈曲问题, 要注意求得载荷最小值。

## 第 12 章 任意铺设复合材料 薄圆柱壳静力响应解析

随着以复合材料为代表的各向异性材料在工程结构中的应用越来越广泛,各向异性结构力学研究就显得更为重要了。圆柱壳以优异的厚度体积比、强度重量比、轻巧的结构造型和制造简易等众多优点广泛应用于各种重要工程中。针对圆柱壳开展的解析求解也受到各国力学界的重视,但绝大多数的工作停留在各向同性、正交异性圆柱壳领域。任意铺设圆柱壳存在拉剪耦合、弯扭耦合和拉弯耦合效应,使得复合材料圆柱壳解析求解变得异常困难。在一些有重量要求的重要工程(如航天航空飞行器工程),由于复合材料具有比强度和比刚度高,可设计性强等许多优异特性,复合材料壳体一般可做得很薄,这样实际工程中得许多问题可以按经典圆柱壳理论计算分析,以 3 个位移分量和作为未知数求解,这样既简化了工作又可得到较满意得结果。本章在前几章基础上运用新复级数法建立了任意铺设复合材料圆柱壳静力响应的一般解析解。在验证了所得到一般解析解的对称性及对边界条件满足情况后,进行数值分析计算并初步探讨了复合材料薄圆柱壳在横向载荷作用下的静力学特性。

### 12.1 任意铺设复合材料薄圆柱壳 弯曲问题的位移型方程

圆柱壳(图 12.1)半径为  $R$ , 长度为  $L$ 。

有以下基本关系式:

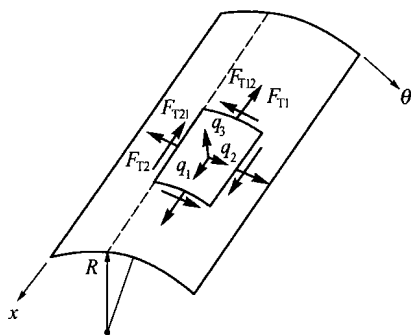


图 12.1 圆柱壳示意图

## 1. 几何关系

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + w \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \chi_\theta &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\
 \chi_{x\theta} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}
 \end{aligned} \tag{12-1}$$

## 2. 物理关系

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \chi_x \\ \chi_\theta \\ \chi_{x\theta} \end{Bmatrix} \tag{12-2}$$

### 3. 平衡方程

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + A_{66} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\
 & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + A_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \\
 & (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - B_{26} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R} \left( A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \\
 & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + A_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\
 & 2A_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + A_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \\
 & 3B_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - B_{22} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R} \left( A_{16} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \\
 & - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} - \\
 & B_{26} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R} \left( A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \\
 & (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} - 3B_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial \theta^2} - B_{22} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \\
 & \frac{1}{R} \left( A_{26} \frac{\partial v}{\partial x} + A_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \theta} + \\
 & 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + 4D_{26} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^3 \partial x} + D_{22} \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{1}{R^2} A_{22} w - \\
 & \frac{2}{R} \left( B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2B_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) = q \quad (12-3)
 \end{aligned}$$

式中:  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i=1, 2 \quad j=1, 2, 6)$  为面内刚度系数、耦合、刚度系数、弯曲刚度系数, 具体形式见参考文献[81]。

引入无量纲量  $\xi = \frac{x}{L}$ , 并代入式(5.4)可得无量纲控制方程, 这里略具体形式。

任意铺设复合材料薄圆柱壳弯曲问题求解可归结为求解偏微分方程组式(12-3)在弯曲圆柱壳边界条件下边值问题。

## 12.2 任意铺设复合材料薄圆柱壳静力问题 一般解析解的建立

本书一般解析解由通解、补充解和特解组成。

### 1. 通解的推导

本书采用位移法求解, 设

$$\begin{aligned} u &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{ins\xi} e^{in\theta} \\ v &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{ins\xi} e^{in\theta} \\ w &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{ins\xi} e^{in\theta} \end{aligned} \quad (12-4)$$

式中:  $i$  为虚数单位,  $n$  为整数,  $s$  为特征根。

将式(12-4)代入式(12-3), 当  $n$  不为 0 时, 可推得有关  $s$  的 8 次特征代数方程, 即

$$\begin{aligned} S_{80}s^8 + S_{71}\alpha s^7 + S_{62}\alpha^2 s^6 + S_{53}\alpha^3 s^5 + S_{44}\alpha^4 s^4 + S_{35}\alpha^5 s^3 + \\ S_{26}\alpha^6 s^2 + S_{17}\alpha^7 s + S_{08}\alpha^8 + S_{40}\alpha^4 s^4 + S_{31}\alpha s^3 + S_{22}\alpha^2 s^2 + \\ S_{13}\alpha^3 s + S_{04}\alpha^4 = 0 \end{aligned} \quad (12-5)$$

式(12-5)中  $S_{ki}$  形式略。

对于一般铺设的复合材料板,式(12-5)有四对共轭复根,即

$$c_k \pm id_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (12-6)$$

采用第三章类似的步骤,可以推得的实数形式级数通解  $U$ 、 $V$ 、 $W$  合写如下

$$\begin{aligned} (u^*, v^*, w^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \frac{\sinh nd_k \xi \sin n(c_k(1-\xi) - \theta)}{\sinh nd_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \frac{\sinh nd_k (1-\xi) \sin n(c_k \xi + \theta)}{\sinh nd_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \frac{\sinh nd_k \xi \cos n(c_k(1-\xi) - \theta)}{\sinh nd_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \frac{\sinh nd_k (1-\xi) \cos n(c_k \xi + \theta)}{\sinh nd_k} \end{aligned} \quad (12-7)$$

从基本解的独立性出发,可得到  $E_{ijn} F_{ijn} G_{ijn}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 之间的关系式。这样可得 8 组线性方程,用计算程序可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{Bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{Bmatrix} \quad (12-8)$$

对于规则非对称正交铺设圆柱壳、规则反对称圆柱壳,上面关系

矩阵不成立,解形式发生变化,另外给出相应解。

从线性偏微分方程解得可叠加性出发,在式(12-7)基础上补充多项式、梁函数及特解,可得一般解析解:

$$\begin{aligned}
 w = & w^* + t_1 + t_2(\xi - 0.5) + \\
 & W_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0) \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + W_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0(1 - \xi) + \\
 & W_{x3} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0 \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + W_{x4} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0(1 - \xi) + \\
 & W^{**}
 \end{aligned} \quad (12-9)$$

$$\begin{aligned}
 u = & u^* + t_3 + t_4(\xi - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\
 & U_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0) \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + U_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0(1 - \xi) + \\
 & U_{x3} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0 \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + U_{x4} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0(1 - \xi) + \\
 & U^{**}
 \end{aligned} \quad (12-10)$$

$$\begin{aligned}
 v = & v^* + t_6 + t_7(\xi - 0.5) + t_8(\xi - 0.5)^2 + \\
 & V_{x1} \frac{\sinh(\xi c_0) \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + V_{x2} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0(1 - \xi) + \\
 & V_{x3} \frac{\sinh(1 - \xi) c_0 \sin(d_0 \xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} + V_{x4} \frac{\sinh(\xi c_0)}{\sinh(c_0) \sin(d_0)} \sin d_0(1 - \xi) + \\
 & V^{**}
 \end{aligned} \quad (12-11)$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于横向弯曲问题,引入势函数  $\Phi$ ,引进微分算子  $D_0$ ,它是以算子  $L_y$  组成得  $3 \times 3$  行列式,并令  $D_{kl}(k, l = 1, 2, 3)$  表示给该行列式的代



数余子式。使

$$U = D_{31}\Phi \quad V = D_{32}\Phi \quad W = D_{33}\Phi \quad (12-12)$$

依照线性代数理论,基本微分方程可以写成

$$D_0\Phi = q \quad (12-13)$$

展开为

$$\begin{aligned} & SS_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^7 \partial \theta} + SS_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \theta^2} + SS_{53} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \theta^3} + SS_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \theta^4} + \\ & SS_{35} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \theta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^6} + SS_{17} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi \partial \theta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \theta^8} + \\ & SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \theta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \theta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} = q \end{aligned} \quad (12-14)$$

从而可推出各位移特解。

### 3. 求解模式

将三个位移一般解析解中的多项式、梁函数代入三个控制方程,可得 12 个独立方程。在实际计算中,  $n$  不可能取无穷大, 设最大取  $M$ , 这样一般解析解式(12-9)、式(12-10)和式(12-11)共有  $16M+8$  个未知数。对于任意铺设圆柱壳, 每边有四个边界条件, 共有 8 个边界条件。将一般解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $2M+1$  项傅里叶级数。根据傅里叶级数的正交性, 可以得到  $16M+8$  个线性代数方程, 可以求解  $16M+8$  个未知数, 薄圆柱壳横向弯曲问题得解。

## 12.3 任意铺设复合材料薄圆柱壳弯曲 问题数值分析

本书计算涉及具有两种边界条件薄圆柱壳: 两端简支固定 SS 圆

柱壳,两端固支固定 CC 圆柱壳。具体边界条件如下:

两端简支固定壳边界条件为

$$\xi = 0, \quad u = 0 \quad v = 0 \quad M_x = 0 \quad w = 0$$

$$\xi = 1, \quad u = 0 \quad v = 0 \quad M_x = 0 \quad w = 0$$

两端固支固定壳边界条件为

$$\xi = 0, 1 \quad u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

### 1. 圆柱壳位移、内力总体分布及边界收敛情况验证

为了考查本书解对边界条件收敛性,本书针对两层 $[0/45^\circ]_T$ 铺设层合圆柱壳在 $q\cos(\theta)$ 载荷作用下的横向弯曲进行计算。

所选复合材料常数为

$$E_1 = 145 \text{ GPa} \quad E_2 = 9.6 \text{ GPa} \quad G_{12} = 4.1 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

几何、载荷参数为

$$L = R = 1 \text{ m} \quad h = 0.01 \text{ m} \quad q = 10^4 \text{ N/m}^2$$

为了显示任意铺设层合板位移 $w$ 、 $U$ 、 $V$ 、 $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$ 、 $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$ 总体分布情况,下面给出表 12-1~表 12-9。

表 12-1  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳挠度 $w \times 10^2$ 分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-0.44695	-0.52581	-0.52925	-0.52581	-0.44695	0.000
0.2	0.000	-0.34383	-0.23284	-0.16355	-0.09213	0.06759	0.000
0.5	0.000	0.44695	0.52581	0.52925	0.52581	0.44695	0.000
0.8	0.000	0.06759	-0.09213	-0.16355	-0.23284	-0.34383	0.000
1.0	0.000	-0.44695	-0.52581	-0.52925	0.52581	-0.44695	0.000

表 12-2  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳轴向位移 $w \times 10^4$ 分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-0.14885	-0.08722	0.00000	0.08722	0.14885	0.000

(续)

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.2	0.000	-0.75826	-0.72476	-0.68425	-0.67085	-0.66626	0.000
0.5	0.000	0.14885	0.08722	0.00000	-0.08722	-0.14885	0.000
0.8	0.000	0.66626	0.67085	-0.68425	-0.72476	0.75826	0.000
1.0	0.000	-0.14885	-0.08722	0.00000	0.87223	0.14885	0.000

表 12-3  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳环向位移  $v \times 10^3$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-0.16905	-0.05155	0.0000	0.05155	0.16905	0.000
0.2	0.000	0.70387	1.14630	1.2101	1.17810	0.80835	0.000
0.5	0.000	0.16905	0.05155	0.0000	-0.05155	-0.16905	0.000
0.8	0.000	-0.80835	-1.17810	-1.2101	-1.14630	-0.70387	0.000
1.0	0.000	-0.16905	-0.05155	0.000	0.05155	0.16905	0.000

表 12-4  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳轴向弯矩  $M_x$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-21.041	-17.128	-16.748	-17.128	-21.041	0.000
0.2	0.000	-5.2989	-3.9241	-5.1756	-6.6617	-7.7049	0.000
0.5	0.000	21.041	17.128	16.748	17.128	21.041	0.000
0.8	0.000	-7.7049	-6.6617	-5.1756	-3.9241	-5.2989	0.000
1.0	0.000	-21.041	-17.128	-16.748	-17.128	-21.041	0.000

表 12-5  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳环向弯矩  $M_y$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-8.9919	-16.290	-15.739	-15.667	-15.739	-16.290	-8.9919
0.2	3.4684	-1.4568	-3.4360	-4.8414	-6.2912	-8.6111	-9.0257

(续)

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.5	8.9919	16.290	15.739	15.667	15.739	16.290	8.9919
0.8	-9.0257	-8.6111	-6.2912	-4.8414	-3.4360	-1.4568	3.4684
1.0	-8.9919	-16.290	-15.739	-15.667	-15.739	-16.290	-8.9919

表 12-6  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳扭矩  $M_{xy}$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-8.9550	-15.762	-15.377	-15.315	-15.377	-15.762	-8.9550
0.2	3.5298	-1.3281	-3.3585	-4.7326	-6.1452	-8.4133	-9.0643
0.5	8.9550	15.762	15.377	15.315	15.377	15.762	8.9950
0.8	-9.0643	-8.4133	-6.1452	-4.7326	-3.3585	-1.3281	3.5298
1.0	-8.9550	-15.762	-15.377	-15.315	-15.377	-15.762	-8.9550

表 12-7  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳面内轴向力  $N_x$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-5050.9	-5830.4	-6234.8	-6285.2	-6234.8	-5830.4	-5050.9
0.2	1247.3	-1178.0	-1366.4	-1942.2	-2486.9	-3485.6	-4368.9
0.5	5050.9	5830.4	6234.8	6285.2	6234.8	5830.4	5050.9
0.8	-4368.9	-3485.6	2486.9	-1942.2	-1366.4	-1178.0	1247.3
1.0	-5050.9	-5830.4	-6234.8	-6285.2	-6234.8	-5830.4	-5050.9

表 12-8  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳面内环向力  $N_y$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-4202.7	-9818.8	-10115.0	-10084.0	-10115.0	-9818.8	-4207.7
0.2	1707.2	-3278.7	-3186.4	-3116.2	-3065.0	-2789.6	-4304.6
0.5	4202.7	9818.8	10115.0	10084.0	10115.0	9818.8	4202.7

(续)

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.8	-4304.6	-2789.6	-3065.0	-3116.2	3186.4	-3278.7	1707.2
1.0	-4202.7	-9818.0	-10115.0	-10084.0	-10115.0	-9818.8	-4202.7

表 12-9  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳面内剪力  $N_{xy}$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-5785.8	-5929.0	-5893.1	-5890.2	-5893.1	-5929.0	-5785.8
0.2	2570.0	1046.7	-860.98	-1820.2	-2781.2	-4711.0	-6145.8
0.5	5785.8	5929.0	5893.1	5890.2	5893.1	5929.0	5785.8
0.8	-6145.8	-4711.0	-2781.2	-1820.2	-860.98	1046.7	2570.0
1.0	-5785.8	-5929.0	-5893.1	-5890.2	-5893.1	-5929.0	-5785.8

从表 12-1 ~ 表 12-5 可看出,本章解可精确地满足了位移、力矩边界条件。从各表数值量值,可发现对于承受横向载荷的两端简支固定圆柱壳,沿厚度方向位移-挠度  $w$  是主要位移,环向位移  $v$ 、轴向位移  $u$  是次要位移。 $v$ 、 $u$  互相比,  $v$  又约比  $u$  高一个数量级,而  $w$  又约比  $v$  高一个数量级,如此  $w$  比  $u$  约高两个数量级。鉴于这是对两端简支固定圆柱壳计算所得结果,由此可见对圆柱壳面内边界条件对圆柱壳位移分布有重大影响,面内位移、面内边界约束与横向挠度位移、横向边界约束的相互关联是壳体重要特点。

综合分析表 12-5 ~ 表 12-9,可发现圆柱壳体内力矩要比面内力小得多,后者约比前者高 2 个数量级,这说明虽然复合材料圆柱壳由于受面内位移、面内边界约束与横向位移、横向边界约束互相关联使无矩状态一般较难实现,但面内力仍占主要地位,这对提高复合材料圆柱的承载能力是有积极意义的。具体比较可发现,内力矩基本上处在一个数量级上,由于弯扭耦合效应的影响扭矩与弯矩处在同一数量级。同样面内力也基本上处在一个数量级上,拉剪耦合效应使剪力并没有成为次要内力。复合材料结构特有的耦合效应使复合材料壳

体内力、内力矩呈现出与各向同性圆柱壳迥然不同的规律。

## 2. 圆柱壳位移、内力对称性及铺层对称性分析

通过对复合材料圆柱壳材料、边界条件和载荷对称情况综合分析,可以得到如下结论:对铺设方式一定的复合材料圆柱壳,当复合材料圆柱壳材料、边界条件和载荷呈中心对称时,具有圆柱壳挠度呈中心对称,而面内位移  $u$ 、 $v$  呈反中心对称,相应地各内力内力矩也呈中心对称,具体表示为

$$w(\xi, \theta) = w(1 - \xi, -\theta)$$

$$u(\xi, \theta) = -u(1 - \xi, -\theta)$$

$$v(\xi, \theta) = -v(1 - \xi, -\theta)$$

表 12-1 ~ 表 12-3 反映了上述位移对称性,表 12-4 ~ 表 12-9 显示了圆柱壳内力、内力矩对称性。在数值计算中引入对称性结论,可有效地降低计算量。

与经典理论的薄任意铺设层合板类似,层合板物理量与计算所选坐标系亦无关,以此通过坐标转换可以发现:  $(\theta_1/\theta_2/\cdots/\theta_N)_T$  铺设层合圆柱壳与  $(-\theta_1/-\theta_2/\cdots/-\theta_N)_T$  铺设层合圆柱壳位移对称。而在任意层合板存在的  $(\theta_1/\theta_2/\cdots/\theta_N)_T$  铺设结构与  $(90^\circ - \theta_1/90^\circ - \theta_2/\cdots/90^\circ - \theta_N)_T$  铺设层合板对称性在圆柱壳中并不成立。为显示圆柱壳铺层对称性,选择  $[0/10^\circ]_T$  与  $[90^\circ/80^\circ]_T$ 、 $[30^\circ]_T$  与  $[60^\circ]_T$ 、 $[-15^\circ/-30^\circ]_T$  与  $[15^\circ/30^\circ]_T$  等铺设方式的两端简支固定层合圆柱壳进行比较计算,结构参数、载荷参数同上。所得板中心挠度  $w$  弯矩  $M_x$   $M_y$  扭矩  $M_{xy}$  平面力  $N_x$   $N_y$   $N_{xy}$  的结果反映在表 12-10 中。

表 12-10 铺层对称性验证计算结果

铺层方式	$w(0.5, 0)$ /m	$M_x(0.5, 0)$ /N	$M_y(0.5, 0)$ /N	$M_{xy}(0.5, 0)$ /N	$N_x(0.5, 0)$ /(N/m)	$N_y(0.5, 0)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5, 0)$ /(N/m)
$[0/10]_T$	-0.000133	-8.2780	-0.45758	-1.4070	-4576.0	-10577.0	-821.03
$[90/80]_T$	-0.000031	-0.50980	0.346690	-1.9980	-748.90	-10010.0	-742.23
$[30]_T$	-0.000067	0.17064	-87.402	0.018046	-14688.0	-10168.0	-7833.0

(续)

铺层方式	$w(0.5,0)$ /m	$M_x(0.5,0)$ /N	$M_y(0.5,0)$ /N	$M_{xy}(0.5,0)$ /N	$N_x(0.5,0)$ /(N/m)	$N_y(0.5,0)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5,0)$ /(N/m)
$[60]_T$	-0.000028	-0.45010	-0.01064	-0.64004	-3532.60	-10004.0	-4783.60
$[-15/-30]_T$	-0.000088	-17.855	-7.2024	11.280	-11327.0	-10320.0	5052.20
$[15/30]_T$	-0.000088	-17.855	-7.2024	-11.280	-11327.0	-10320.0	-5052.20

### 3. 圆柱壳铺设角、铺层敏感性分析

在实际工艺制作中纤维取向的微量差异对层合板力学性能会有一些影响,其程度大小是工程界所关心的。本书针对两端简支固定 $[0/\theta]_T$ 任意铺设层合圆柱壳,逐渐减小 $\theta$ ,将所得圆柱壳中心 $(0.5,0)$ 处挠度、内力、内力矩计算结果与 $[0]_T$ 铺设圆柱壳中心 $(0.5,0)$ 相应值比较,据此探讨铺设角微小变化及由此带来铺设方式的变异对层合板力学特性的影响,结构参数、载荷参数同上。

从表 12-11 发现铺设角微小改变对圆柱壳位移、内力矩、轴向面内力、环向面内力影响不大,而且 $\theta$ 误差越小由此带来的板刚度内力差异越小。但面内剪力受 $\theta$ 影响较大,面内剪力对 $\theta$ 较为敏感,当 $\theta$ 从 $0^\circ$ 增加到 $1^\circ$ , $N_{xy}$ 的绝对值就从 0.0 增加到 53.855,虽然已远大于轴向面内力、环向面内力,但数值上已与壳体内力矩相当。可见在圆柱壳制作中纤维精确铺设是必要的。然而铺设角 $\theta$ 逼近 $0^\circ$ 时,表中显示的 $[0/\theta]_T$ 铺设层合圆柱壳各物理量已逼近 $\theta$ 为 0 的 $[0]_T$ 层合圆柱壳相应值,这从另一侧面验证了本书解的正确性。

表 12-11 微小 $\theta$ 的 $[0/\theta]_T$ 铺设层合圆柱壳与 $[0]_T$

层合圆柱壳计算结果比较

$\theta/(^\circ)$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5,0)$ /N	$M_y(0.5,0)$ /N	$M_{xy}(0.5,0)$ /N	$N_x(0.5,0)$ /(N/m)	$N_y(0.5,0)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5,0)$ /(N/m)
1	-0.14011	-1.8735	-0.15022	-0.04704	-2994.80	-10681.00	-53.855
0.1	-0.14019	-1.8019	-0.14877	-0.00460	-2977.60	-10681.00	-5.3546
0.01	-0.14019	-1.8012	-8.14877	-0.00046	-2977.40	-10681.00	-0.53543

(续)

$\theta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5,0)$ /N	$M_y(0.5,0)$ /N	$M_{xy}(0.5,0)$ /N	$N_x(0.5,0)$ /(N/m)	$N_y(0.5,0)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5,0)$ /(N/m)
0.001	-0.14019	-1.8012	-8.14875	-0.00005	-2977.40	-10681.0	-0.05354
0.000	-0.23563	-289.87	-8.1499	0.0000	-2174.70	-9188.40	0.0000

下面按照上述方法进行数值计算,以研究任意铺设对薄层合壳刚度内力的影响。

为察材料各向异性程度对圆柱壳弯曲力学状态的影响,本书选择两种复合材料进行分析,其材料1为强各向异性材料,材料2为弱各向异性材料,其材料参数见表12-12。

表12-12 复合材料的工程参数

材料特性	$E_1/\text{GPa}$	$E_2/\text{GPa}$	$G_{12}/\text{GPa}$	$G_{13}/\text{GPa}$	$G_{23}/\text{GPa}$	$\gamma_{12}$
强各向异性	144.79	9.65	4.14	4.14	3.212	0.3
弱各向异性	143.6	75.4	42.1	25.6	42.7	0.44

#### 4. 铺设参数对薄圆柱壳静力弯曲影响分析计算结果

为避免横向剪切效应的影响,计算采取薄壳(本书取 $R/h=100$ )进行计算,取 $L=1\text{m}$ , $R=1\text{m}$ , $h=0.01\text{m}$ ,载荷开始选为均布压力 $q$ ,取 $q=-10000\text{N/m}^2$ ,材料选弱各向异性材料2。本书给出表12-13~表12-17分别考察两端简支固定SS圆柱壳中心挠度、弯矩( $M_x$ 、 $M_y$ )、扭矩( $M_{xy}$ )、面内力( $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$ )随铺设层数、铺设角 $\beta$ 变化趋势。

表12-13 材料2的单层 $\beta$ 角铺设SS圆柱壳中心挠度、内力图

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_r$ /N	$M_\theta$ /N	$M_{r\theta}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
0	-0.11957	0.2408	0.05535	0	-4034.20	-9947.60	0
15	-0.11296	0.1842	0.04410	0.01150	-3828.30	-9948.30	-964.17
30	-0.09811	0.0712	0.01885	0.00841	-3354.80	-9954.60	-1466.80
45	-0.08286	-0.0068	-0.00207	-0.001055	-2858.30	-9969.50	-1454.00
60	-0.07162	-0.0273	-0.00989	-0.004326	-2476.30	-9985.40	-1104.60



(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_r$ /N	$M_{\theta}$ /N	$M_{r\theta}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
75	-0.06508	-0.0235	-0.00977	-0.002461	-2247.00	-9994.40	-585.91
90	-0.06296	-0.0204	-0.00896	0	-2171.50	-9996.90	0

表 12-14 材料 2 的  $[\beta/-\beta]_T$  反对称角铺设 SS

圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.11282	0.13572	0.00572	2.5750	-3825.50	-9947.79	61.251
30	-0.09775	-0.04746	-0.08195	3.8323	-3349.30	-9956.20	97.284
45	-0.08266	-0.13134	-0.11856	3.8323	-2854.40	-9973.40	101.94
60	-0.07153	-0.10590	-0.08902	2.8946	-2475.10	-9988.00	81.573
75	-0.06502	-0.04760	-0.03490	1.5278	-2246.90	-9995.00	44.825
90	-0.06296	-0.02037	-0.00896	0	-2171.50	-9996.90	0

表 12-15 材料 2 的  $[\beta/-\beta/\beta]_T$  对称角铺设 SS 圆柱壳

中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.11283	0.1780	0.0426	0.0103	-3825.30	-9947.80	-321.14
30	-0.09778	0.0606	0.0160	0.0066	-3348.40	-9954.60	-488.02
45	-0.08266	-0.01175	-0.0035	-0.00169	-2852.90	-9970.40	-483.75
60	-0.07153	-0.02787	-0.0101	-0.00409	-2473.90	-9986.00	-367.86
75	-0.06506	-0.02342	-0.0096	-0.00227	-2246.50	-9994.50	-195.26

表 12-16 材料 2 的  $[\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta/-\beta]_T$  角铺设 SS

圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.11282	0.17466	0.0401	0.6438	-3825.00	-9947.77	15.288

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
30	-0.09775	0.05269	0.00962	0.9727	-3347.80	-9954.70	24.190
45	-0.08264	-0.01967	-0.01009	0.9577	-2852.50	-9970.70	25.267
60	-0.07152	-0.03278	-0.01503	0.72344	-2473.70	-9986.20	20.230
75	-0.06506	-0.02492	-0.01132	0.38191	-2246.50	-9994.60	11.173

表 12-17 材料 2 的  $[\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta]_T$  角铺设 SS  
圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x/N$	$M_y/N$	$M_{xy}/N$	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.11283	0.17733	0.04245	0.00366	-3825.00	-9947.70	-107.04
30	-0.09775	0.05949	0.01575	0.00232	-3347.80	-9954.60	-162.64
45	-0.08264	-0.01220	-0.00374	-0.00063	-2852.40	-9970.50	-161.22
60	-0.07518	-0.02793	-0.01012	-0.00146	-2473.60	-9986.10	-122.61
75	-0.06506	-0.02341	-0.00975	-0.00081	-2246.50	-9994.50	-65.08

本书又针对两端固支固定 CC 圆柱壳进行相应分析计算。计算中取  $L=1\text{m}$ ,  $R=1\text{m}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $q=-10000\text{N/m}^2$ , 表 12-18 ~ 表 12-22 给出所选的强各向异性材料 1 层合圆柱壳的中心挠度及弯矩 ( $M_x$ ,  $M_y$ )、扭矩 ( $M_{xy}$ )、面内力 ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ) 随铺设角  $\beta$  变化趋势。

表 12-18 材料 1 的单层  $\beta$  角铺设 CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.11179	-6.2063	-0.12409	0	-2108.10	-10830	0
15	-0.10572	-4.2429	-0.37134	-1.0385	-7796.10	-10747	-1804.60
30	-0.06487	-0.3931	-0.12619	-0.19862	-12538.00	-10370	-6771.00
45	-0.02722	0.3132	0.25484	0.23955	-7604.00	-10057	-7147.60
60	-0.01307	0.0147	0.02184	0.01179	-3093.00	-9991.50	-4868.40

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
75	-0.00835	-0.006	-0.00068	-0.00016	-8393.70	-10001.00	-2347.50
90	-0.00687	0.0002	0.000062	0	-1845.70	-9999.00	0

表 12-19 材料 1 的 $[\beta/-\beta]_T$ 角铺设 CC 圆柱壳

中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.11179	-6.2063	-0.12409	0	-2108.10	-10830	0.00
15	-0.10244	0.31490	0.02885	4.6450	-8215.30	-10473.00	0.00
30	-0.06034	0.58766	0.17139	17.894	-13010.00	-10104.00	0.00
45	-0.02519	0.07616	0.04507	18.567	-7624.80	-9986.90	0.00
60	-0.01217	-0.00215	-0.00231	12.585	-3013.50	-10005.00	0.00
75	-0.00835	0.000112	0.00070	6.1219	-809.25	-10000.00	0.00
90	-0.00687	0.000021	0.00000	0.00	-1845.70	-9999.00	0.00

表 12-20 材料 1 的 $[\beta/\beta]_T$ 角铺设 CC 圆柱壳

中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
15	-0.10571	-4.2384	-0.37095	-0.96060	-7795.50	-10747.00	-601.50
30	-0.06466	-0.3492	-0.11209	-0.16337	-12520.00	-10369.00	-2253.80
45	-0.02618	0.32134	0.26179	0.22785	-7508.80	-10035.00	-2352.70
60	-0.01228	-0.00770	-0.01100	-0.00549	-2999.00	-9997.80	-1573.500
75	-0.00790	0.000162	0.00017	0.000037	-811.46	-1000.00	-756.47

表 12-21 材料 1 的  $[\beta/\beta/\beta/\beta/\beta/\beta]_T$  角铺设  
CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
15°	-0.10559	-3.8770	-0.33993	1.09740	-7816.80	-10738.00	0.00
30°	-0.06445	-0.2248	-0.07198	4.35110	-12543.00	-10357.00	0.00
45°	-0.02089	0.30891	0.24942	4.62300	-7511.30	-10030.00	0.00
60°	-0.01232	-0.00699	-0.01017	3.14450	-2994.20	-9998.40	0.00
75°	-0.00786	0.001328	0.00014	1.53050	-808.63	-10000.00	0.00

表 12-22 材料 1 的  $[\beta/\beta/\beta/\beta/\beta/\beta]_T$  角铺设  
CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
15	-0.10571	-4.2382	-0.37094	-0.34295	-7795.40	-10747.00	-200.50
30	-0.06465	-0.34799	-0.11172	-0.05813	-12520.00	-10369.00	-751.25
45	-0.02615	0.32122	0.26137	0.08122	-7505.70	-10034.00	-783.91
60	-0.01240	-0.00724	-0.01075	-0.00192	-2993.70	-9998.20	-523.56
75	-0.00786	0.001371	0.00015	0.000011	-808.91	-10000.00	-251.36

### 5. 耦合效应对薄圆柱壳静力弯曲影响分析计算结果

为研究拉弯耦合对任意铺设层合圆柱壳具体影响,可忽略拉弯耦合效应将任意铺设层合板视为各向异性圆柱壳进行计算,并将此结果与按真实的任意铺设层合圆柱壳计算所得相应结果比照,以反映拉弯耦合的影响。计算选取材料 1 的两端简支固定圆柱壳 SS 及两端固支固定 CC 圆柱壳解析进行,圆柱壳结构参数为  $L = 1\text{m}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = -10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 12-23 和表 12-24 中。表 12-23 和表 12-24 每格中\* 位置数值为按任意铺设解计算真实值,\*\* 位置数值为按各向异性圆柱壳计算所得比值。

表 12-23 考虑拉弯耦合及忽略拉弯耦合两情况下材料

[0/β]<sub>T</sub>CC 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.1118	6.2063	0.12407	0.00	2108.1	10830.0	0.000
15	-0.1059 *	-12.7862	-0.9495	-2.8695	-5094.10	-10589.00	-927.05
	-0.1083 **	-5.0542	-0.2609	-0.5792	-4998.70	-10793.00	-918.71
30	-0.0778	-20.9740	-6.8562	-11.342	-8551.60	-10252.00	-4181.00
	-0.0813	-1.8378	-0.2433	-0.3466	-8428.60	-10578.00	-4120.90
45	-0.0428	-15.1610	-14.836	-14.513	-6303.10	-10077.00	-5483.20
	-0.0448	0.1296	0.02664	0.0232	-6231.40	-10286.00	-5420.70
60	-0.0237	-6.64620	-19.294	-10.978	-2904.60	-10014.00	-4139.00
	-0.0245	0.47662	0.0892	0.04359	-2872.40	-10108.00	-4093.00
75	-0.0155	-1.68600	-21.215	-5.6177	-927.65	-9990.00	-2059.90
	-0.0157	0.28040	0.0254	0.0047	-911.06	-9976.00	-2023.00
90	-0.0129	-0.11307	-21.871	0.000	-327.93	-9991.70	0.00

表 12-24 考虑拉弯耦合及忽略拉弯耦合两情况下材料 1[0/β]<sub>T</sub>SS

圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.10378	6.2063	0.12407	0.00	-2108.1	-10830.0	0.000
15	-0.10378	-12.810	-9.8054	-3.1478	-5592.20	-10421.00	-1590.5
	-0.10599	1.7565	0.0907	0.2013	-6000.10	-10627.00	-1102.80
30	-0.07439	-24.031	-7.4802	-12.375	-8556.20	-10158.00	-4949.70
	-0.07645	1.7865	0.23645	3.3693	-9658.50	-10371.00	-4722.20
45	-0.04064	-16.783	-15.324	-14.979	-5926.60	-10043.00	-5842.10
	-0.04059	1.1050	0.22711	0.19757	-6757.80	-10125.00	-5878.70
60	-0.02255	-7.8478	-15.591	-11.140	-2434.30	-10001.00	-4323.70
	-0.02229	0.52415	0.0981	0.0479	-3042.10	-10014.00	-4334.90

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
75	-0.01510	-2.9791	-21.380	-5.6574	-351.12	-9991.80	-2168.50
	-0.01500	0.1298	0.01175	0.00216	-970.23	-9965.90	-2154.40
90	-0.01291	1.53750	21.934	0.000	-322.73	10000.00	0.00

类似地,忽略层合圆柱壳中拉剪效应按假想无拉剪耦合效应的铺设层合圆柱壳进行计算,可以研究拉剪耦合对任意铺设层合圆柱壳弯曲状态具体影响,并将此结果与按真实的任意铺设层合圆柱壳计算所得相应结果比照,可以反映拉剪耦合效应的影响。计算选取材料 1 的 SS 圆柱壳及 CC 圆柱壳解析进行,结构参数为  $L = 1\text{m}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = -10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 12-25 和表 12-26 中。表 12-25 和表 12-26 每格中\* 位置数值为按任意铺设解计算真实值,\*\* 位置数值为忽略拉剪耦合计算所得比拟值。

表 12-25 考虑拉剪耦合及忽略拉剪耦合两情况下材料  
 $[0/\beta]_T$  CC 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.1118	-6.2063	-0.12407	0.00	-2108.1	-10830.0	0.000
15	-0.1059 *	-12.7862	-0.9495	-2.8695	-5094.10	-10589.00	-927.05
	-0.1056 **	-14.777	-1.0227	-3.0294	-4969.20	-10584.00	0.000
30	-0.0778	-20.9740	-6.8562	-11.342	-8551.60	-10252.00	-4181.00
	-0.0744	-26.7800	-7.6304	-12.531	-7916.10	-10195.00	0.000
45	-0.0428	-15.1610	-14.836	-14.513	-6303.10	-10077.00	-5483.20
	-0.0385	-18.6340	-15.910	-15.531	-5626.40	-10046.00	0.000
60	-0.0237	-6.64620	-19.294	-10.978	-2904.60	-10014.00	-4139.00
	-0.0210	-7.65140	-19.972	-11.357	-2636.80	-10004.50	0.000

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
75	-0.0155	-1.68600	-21.215	-5.6177	-927.65	-9990.00	-2059.90
	-0.0145	-1.81560	-21.477	-5.6866	-883.48	-9994.00	0.000
90	-0.0129	0.11307	21.871	0.000	327.93	9991.70	0.00

表 12-26 考虑拉剪耦合及忽略拉剪耦合两情况下材料

[0/ $\beta$ ]<sub>TSS</sub> 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^3$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.1038	-6.2063	-0.12407	0.00	-2108.1	-10830.0	0.000
15	-0.1038	-12.810	-9.8054	-3.1478	-5592.20	-10421.00	-1590.5
	-0.1044	-12.772	-1.0663	-3.4494	-5585.50	-10445.00	-516.560
30	-0.0744	-24.031	-7.4802	-12.375	-8556.20	-10158.00	-4949.70
	-0.0741	-26.969	-8.2101	-13.5530	-8340.20	-10195.00	-561.620
45	-0.0406	-16.783	-15.324	-14.979	-5926.60	-10043.00	-5842.10
	-0.0195	-16.466	-16.074		-5422.50	-10025.00	-303.390
60	-0.0226	-7.8478	-15.591	-11.140	-2434.30	-10001.00	-4323.70
	-0.0212	-9.0389	-20.287	-11.5280	-2053.20	-9998.70	-99.972
75	-0.0151	-2.9791	-21.380	-5.6574	-351.12	-9991.80	-2168.50
	-0.0146	-3.2765	-21.591	-5.7121	-223.870	-9997.30	-13.9730
90	-0.0129	1.53750	21.934	0.000	-322.73	10000.00	0.00

## 6. 结论

分析表 12-13 ~ 表 12-26, 可以得到以下结论:

(1) 拉弯耦合效应对薄圆柱壳挠度、内力有一定影响, 但对于层合圆柱薄壳影响要小于其对任意铺设层合板的影响。与层合板相反, 拉弯耦合增大了圆柱壳刚性。计算发现即使对于承受横向载荷的圆柱薄壳, 壳体中弯矩、扭矩亦明显小于壳体面内力, 薄膜内力对弯曲内力即使有影响, 但由弯曲内力本身数值很小, 其影响程度也不明显。

比较来说,拉弯耦合对薄膜内力影响较大。一般拉弯耦合使轴向薄膜内力、面内剪力不同程度有消长(对 SS 圆柱壳使起增大效应,对 CC 圆柱壳使起削弱效应),但对环向薄膜内力影响较小,而对承受横向载荷的圆柱壳其环向薄膜内力数值上最大,自然拉弯耦合对层合圆柱壳影响就显得弱一些。

(2) 拉剪耦合效应对薄圆柱壳结构位移、内力影响很明显。由于承载圆柱壳,面内薄膜内力要明显大于弯曲内力,拉剪耦合主要涉及面内交叉效应,自然对圆柱壳结构发挥了明显影响力。分析表 12-23 和表 12-24 可看出,对 SS 圆柱壳,忽略拉剪耦合所得位移值一般要小于考虑拉剪耦合位移值,拉剪耦合降低了壳体有效刚性。忽略拉剪耦合所得轴向薄膜内力、剪力一般也要小于考虑拉剪耦合的相应值,环向薄膜内力值则变化不大。而对 CC 圆柱壳结果比较也可得到类似的结论。这表明对圆柱壳来说,拉剪耦合不利于圆柱壳刚度、强度。鉴于对承受均布载荷、具有对称边界条件的圆柱壳不存在弯扭耦合影响(这一结论不能任意推广),相对而言,拉剪耦合效应对结构影响程度最大。

(3) 铺设角  $\beta$  对任意铺设层合圆柱壳挠度、内力弯矩有重大影响:对于本章所选择各种铺设方式 SS 圆柱壳、CC 圆柱壳, $\beta$  从  $0^\circ$  增大到  $90^\circ$ ,相应圆柱壳中心挠度逐渐减小,并在  $90^\circ$  达到最小值。对于本章所选择各种铺设方式 SS 圆柱壳、CC 圆柱壳的环向薄膜内力则随  $\beta$  变化改变很小,薄膜剪力最大值发生在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度,最小值发生在  $90^\circ$  情况下。而轴向薄膜内力情况则随边界条件不同有差异,轴向薄膜内力最小值均发生在  $90^\circ$  情况下,但对 SS 圆柱壳轴向薄膜内力最大值发生在  $0^\circ$  铺设情况下,CC 圆柱壳轴向薄膜内力最大值发生在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度。

(4) 铺设层数  $N$  增大对层合圆柱壳刚度内力影响程度较对层合板影响要弱。对本章选择承受均布载的角铺设铺设层合圆柱壳,在其他参数相同情况, $N$  增大,圆柱壳中心挠度、内力变化不大,这与承受均布载的层合板不同。尽管如此,对于承受均布载的薄圆柱壳,为安



全及其他考虑采用多层铺设还是必要的,只是在层数大小需综合考虑。

(5) 层合圆柱壳边界条件、载荷及材料各向异性程度对任意铺设薄层合圆柱壳刚度、内力分布变化规律影响是明显的。对本章表 12-12 ~ 表 12-26 进行总体分析可发现:具有不同边界的层合圆柱壳随各设计参数受耦合相应影响的程度趋势是有差异的,需要根据实际边界具体计算分析。这是与层合板情况类似的。

## 12.4 经典任意铺设复合材料薄圆柱壳屈曲和振动问题解析

### 1. 控制方程

经典任意铺设复合材料薄圆柱壳( $L \times R$ )屈曲和振动问题控制方程为:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0 \quad (12-15(a))$$

$$L_{12}u + L_{22}v + L_{23}w = 0 \quad (12-15(b))$$

$$L_{13}u + L_{23}v + L_{33}w = 0 \quad (12-15(c))$$

式中:

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + A_{66} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + A_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

$$L_{13} = -B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} -$$

$$B_{26} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R} \left( A_{11} \frac{\partial}{\partial x} + A_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + A_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{aligned}
L_{23} = & -B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - 3B_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} - \\
& B_{22} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R} \left( A_{16} \frac{\partial}{\partial x} + A_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
L_{33} = & D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \theta} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \\
& 4D_{26} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4}{\partial \theta^3 \partial x} + D_{22} \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \\
& \frac{1}{R^2} A_{22} - \frac{2}{R} \left( B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2B_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \right) + N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
& N_\theta \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2N_{x\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} - \rho \omega^2
\end{aligned}$$

$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$  为圆柱壳中面单位长度上  $x$ 、环向  $\theta$  方向压力载荷、剪力载荷,  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。对于屈曲问题, 方程(12-15)中要舍去  $\omega$ 。对于振动问题, 方程(12-15)要舍去  $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ 。

## 2. 求解过程

### 齐次解和补充解

设方程(12-15)有如下齐次解:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(\xi) e^{in\theta} \\
U &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(\xi) e^{in\theta} \\
V &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n(\xi) e^{in\theta}
\end{aligned} \tag{12-16}$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

设

$$\begin{aligned}
f_n(\xi) &= iG e^{inr\xi} \\
g_n(\xi) &= E e^{inr\xi} \\
h_n(\xi) &= F e^{inr\xi}
\end{aligned} \tag{12-17}$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $G, E$  和  $F$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

将式(12-16)和式(12-17)代入方程(12-15), 根据系数行列式值为 0 的条件, 可得 8 阶代数方程:

$$\begin{aligned} & S_{80}r^8 + S_{71}r^7 + S_{62}r^6 + S_{53}r^5 + S_{44}r^4 + \\ & S_{35}r^3 + S_{26}r^2 + S_{17}r + S_{08} + S_{40}r^4 + S_{31}r^3 + \\ & S_{22}r^2 + S_{13}r + S_{04} = 0 \end{aligned} \quad (12-18)$$

式中:  $S_{80}, \dots, S_{08}$  形式复杂, 具体形式略。

特征方程(12-18)的特征根标注为  $r_k, r_{k+1}$  ( $k = 1, 3, 5, 7$ )。随着  $n$  和载荷 ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) 或  $\omega$  的变化, 特征方程(12-18)可能有共轭复数根 ( $r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k$ ) 或成对的实数根 ( $r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1}$ )。

定义如下函数:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) = & \left[ \frac{\sinh n \pi b_k \xi \sin n \pi (a_k (1 - \xi) - \theta)}{\sinh n \pi b_k}, \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \right. \\ & \left. \sin n \pi (a_k (1 - \xi) - \theta) + \sin n \pi (a_{k+1} (1 - \xi) - \theta), \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (12-19)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) = & \left[ \frac{\sinh n \pi b_k (1 - \xi) \sin n \pi (a_k \xi + \theta)}{\sinh n \pi b_k}, \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \right. \\ & \left. \sin n \pi (a_k \xi + \theta) + \sin n \pi (a_{k+1} \xi + \theta), \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (12-20)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) = & \left[ \frac{\sinh n \pi b_k \xi \cos n \pi (a_k (1 - \xi) - \theta)}{\sinh n \pi b_k}, \quad \text{当 } r_k = a_k + ib_k, r_{k+1} = a_k - ib_k \right. \\ & \left. \sin n \pi (a_k (1 - \xi) - \theta) - \sin n \pi (a_{k+1} (1 - \xi) - \theta), \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (12-21)$$

$$\psi_4(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) =$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\sinh n \pi b_k (1 - \xi) \cos n \pi (a_k \xi + \theta)}{\sinh n \pi b_k}, \quad \text{当 } r_k = a_k + i b_k, r_{k+1} = a_k - i b_k \\ \sin n \pi (a_k \xi + \theta) - \sin n \pi (a_{k+1} \xi + \theta), \quad \text{当 } r_k = a_k, r_{k+1} = a_{k+1} \end{array} \right] \quad (12-22)$$

这样 3 个位移函数  $w, u, v$  的齐次解可以表示为实数级数形式:

$$\begin{aligned} (U^*, V^*, W^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} (E_{1kn}, F_{1kn}, G_{1kn}) \psi_1(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} (E_{2kn}, F_{2kn}, G_{2kn}) \psi_2(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} (E_{3kn}, F_{3kn}, G_{3kn}) \psi_3(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} (E_{4kn}, F_{4kn}, G_{4kn}) \psi_4(\xi, \theta, r_k, r_{k+1}, n) \end{aligned} \quad (12-23)$$

式中:  $E_{jkn}, F_{jkn}, G_{jkn}$  ( $j = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, 4$ ) 为任意待定常数。

将式(12-23)代入控制方程(12-15), 可得到系数相关矩阵:

$$\begin{bmatrix} E_{1kn} \\ E_{2kn} \\ E_{3kn} \\ E_{4kn} \\ F_{1kn} \\ F_{2kn} \\ F_{3kn} \\ F_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1kn} \\ G_{2kn} \\ G_{3kn} \\ G_{4kn} \end{bmatrix} \quad (12-24)$$

### 补充解

根据常微分方程理论可以求得补充解。

设

$$\begin{aligned}u(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\v(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\w(\xi) &= q_x e^{h\xi}\end{aligned}\quad (12-25)$$

式中:  $o_x$ ,  $p_x$ , 和  $q_x$  为实数待定常数,  $h$  为特征根。

将式(12-25)代入方程(12-15)可得:

$$SS_{80}h^8 + SS_{40}h^4 = 0 \quad (12-26)$$

$$SS_{80}h^4 + SS_{40} = 0 \quad (12-27)$$

方程(12-27)有4个特征根,可以标注为  $h_k, h_{k+1}$  ( $k=1,3$ )。  $h_k, h_{k+1}$  ( $k=1,3$ ) 可能为共轭复数根 ( $h_k = \chi_k + i\lambda_k, h_{k+1} = \chi_k - i\lambda_k$ ), 或成对的实数根 ( $h_k = \chi_k, h_{k+1} = -\chi_k$ )。

定义函数

$$\begin{aligned}\Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, f_{xk}, f_{xk+1}) = & \\ \left[ \begin{aligned} & e^{\chi_k} (f_{xk} \cos \lambda_k \xi + f_{xk+1} \sin \lambda_k \xi), \quad \text{当 } h_x = \chi_k + i\lambda_k, h_{x+1} = \chi_k - i\lambda_k \\ & f_{xk} \sin \lambda_k \xi + f_{xk+1} \sin \lambda_k (1 - \xi), \quad \text{当 } h_x = i\lambda_k, h_{x+1} = -i\lambda_k \\ & f_{xk} \frac{\sinh \chi_k \xi}{\sinh \chi_k} + f_{xk+1} \frac{\sinh \chi_k (1 - \xi)}{\sinh \chi_k}, \quad \text{当 } h_x = \chi_k, h_{x+1} = -\chi_k \end{aligned} \right] \end{aligned}\quad (12-28)$$

补充解可得:

$$\begin{aligned}u^{**} &= t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\xi - 0.5)^2 + t_5(\xi - 0.5)^3 + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{xk}, o_{xk+1})\end{aligned}\quad (12-29)$$

$$\begin{aligned}v^{**} &= t_6 + t_7(\xi - 0.5) + t_8(\xi - 0.5)^2 + t_9(\xi - 0.5)^3 + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{xk}, p_{xk+1})\end{aligned}\quad (12-30)$$

$$w^{**} = t_1 + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{xk}, q_{xk+1}) \quad (12-31)$$

式中: ( $o_{zk}, o_{zk+1}, p_{zk}, p_{zk+1}, q_{zk}, q_{zk+1}, k = 1, 3$ ) 为待定常数。

将式(12-29), 式(12-30), 式(12-31)中多项式部分代入方程(12-15), 可得  $t_k (k = 1, 2, \dots, 9)$  之间 5 个关系式。将式(12-29), 式(12-30), 式(12-31)中  $\Gamma$  函数部分代入方程(12-15)任意 2 式, 可得系数关系矩阵:

$$\begin{bmatrix} o_{x1} \\ o_{x2} \\ o_{x3} \\ o_{x4} \\ p_{x1} \\ p_{x2} \\ p_{x3} \\ p_{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZT_{11} & -ZT_{21} & ZT_{13} & -ZT_{23} \\ ZT_{21} & -ZT_{11} & ZT_{23} & -ZT_{13} \\ ZT_{31} & -ZT_{41} & ZT_{33} & -ZT_{43} \\ ZT_{41} & -ZT_{31} & ZT_{43} & -ZT_{33} \\ RT_{11} & -RT_{21} & RT_{13} & -RT_{23} \\ RT_{21} & -RT_{11} & RT_{23} & -RT_{13} \\ RT_{31} & -RT_{41} & RT_{33} & -RT_{43} \\ RT_{41} & -RT_{31} & RT_{43} & -RT_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \\ q_{x4} \end{bmatrix} \quad (12-32)$$

补充解式(12-29), 式(12-30), 式(12-31)只有 8 个独立未知数。

### 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \theta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned} w &= W^* + w^{**} \\ u &= U^* + u^{**} \\ v &= V^* + v^{**} \end{aligned} \quad (12-33)$$

### 求解方法

实际计算中, 设  $n$  最大取  $M$ , 解析解(12.33)共有  $16M + 8$  个未知数 ( $G_{jkm} (j, k = 1, 2, 3, 4), t_j (j = 1, 2, 3, 4)$  和  $q_{x1}, q_{x2}, q_{x3}, q_{x4}$ )。对于基于经典理论的一般铺设圆柱壳屈曲、振动问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成  $2M + 1$  项傅里叶级数, 这样根据傅里叶级数正交性, 可得  $M$  个

16 × 16 个线性代数方程和 1 个 8 × 8 个线性代数方程,满足各个线性代数方程对应行列式值为 0 的  $\omega$  或  $(N_x, N_y, N_{xy})$  即为所求频率或屈曲载荷。对于屈曲问题,要注意求得载荷最小值。

# 第 13 章 考虑剪切变形的任意铺设 复合材料圆柱壳线性力学响应 问题一般解析解

圆柱壳的几何形状简单,又是可展开曲面,制造起来比双曲率壳体简单,因此应用甚广。在船舶工程中,圆柱壳广泛地应用于潜艇结构。复合材料以其无磁性、高强度及加工制造简便等众多优点成为 21 世纪潜艇材料的有力竞争者。美国开发的无人潜水器(一种无人潜艇)选用复合材料结构作为主承力结构即获得成功。复合材料潜艇预研工作在西方国家也已开始。复合材料潜艇研制需要工艺、材料、结构设计等诸多领域努力,其中复合材料圆柱壳结构力学分析占有重要的地位。由于复合材料自身构造的特点带来的各向异性、由呈层性引起的各种耦合效应和基体薄弱带来的剪切变形效应,使得任意铺设复合材料圆柱壳理论及其有关力学问题的求解,变得异常困难,任意铺设复合材料圆柱壳结构解析研究一直也无法进行,而各向异性、耦合效应、剪切变形是复合材料结构的主要力学特性,是需要加以认真研究的。所幸有限元技术发展使人们获得了探讨复合材料结构力学特性的数值分析手段,这在一定程度上掩盖了复合材料结构力学研究解析法严重滞后的缺陷,但数值法代替不了解析法,在力学机理及典型问题研究中解析法有其独到的优势。本章运用新型复级数法建立了考虑剪切变形的任意铺设复合材料圆柱壳线性力学问题的一般解析解,进行数值计算初步讨论在横向载荷作用下圆柱壳结构的力学响应。

## 13.1 线性力学响应问题的位移型方程

圆柱壳半径为  $R$ , 长度为  $L$ 。假定壳体在厚度方向不可压缩,在变



形前壳体中面的法线变形后仍为一条直线,即法线在  $x$  (圆柱壳轴向) 和  $y$  (圆柱壳环向  $y = R\theta$ ) 方向平均转角分别为  $\Phi_x$  和  $\Phi_y$ 。圆柱壳在  $Oxy$  坐标面上的位移分量分别  $u_0, v_0$  和  $w_0$ , 则圆柱壳截面上任意一点的位移分量  $u, v, w$  分别为

$$u = u_0 + z\Phi_x \quad v = v_0 + z\Phi_y \quad w = w_0$$

依据这样位移模式可有以下基本关系式:

### 1. 几何关系

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right) \\ \chi_x &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \chi_y &= \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \Phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \Phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{13-1}$$

$$\tag{13-2}$$

式中:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  为面内应变;  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  为扭率;  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  为沿厚度方向的剪切应变。

## 2. 物理关系

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (13-3)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \Phi_y \end{bmatrix} \quad (13-4)$$

式中:  $A_{ij}$   $B_{ij}$   $D_{ij}$  ( $i=1,2$   $j=1,2,6$ ) 为面内刚度系数、耦合, 刚度系数、弯曲刚度系数, 具体形式见参考文献[4]。 $A_{55}$   $A_{45}$   $A_{44}$  为剪切刚度系数, 选用参考文献[81]中推荐的形式:

$$A_{44} = A/(AB - C^2)$$

$$A_{45} = B/(AB - C^2)$$

$$A_{55} = C/(AB - C^2)$$

$$A = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{44}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k)$$

$$B = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{55}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k)$$

$$C = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{45}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k)$$

$$[\Delta Q]^2 = Q_{44}^{(k)} Q_{55}^{(k)} - [Q_{45}^{(k)}]^2$$

$$H_k = h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{h_k^5 - h_{k-1}^5}{h^4}$$

### 3. 平衡方程

$$\begin{aligned}
 L_{11}u + L_{12}v + L_{13}\Phi_x + L_{14}\Phi_y + L_{15}w &= 0 \\
 L_{21}u + L_{22}v + L_{23}\Phi_x + L_{24}\Phi_y + L_{25}w &= 0 \\
 L_{31}u + L_{32}v + L_{33}\Phi_x + L_{34}\Phi_y + L_{35}w &= 0 \\
 L_{41}u + L_{42}v + L_{43}\Phi_x + L_{44}\Phi_y + L_{45}w &= 0 \\
 L_{51}u + L_{52}v + L_{53}\Phi_x + L_{54}\Phi_y + L_{55}w &= p
 \end{aligned} \tag{13-5}$$

式中:  $L_{ij} (i=1,5; j=1,5)$ 。具体形式如下:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{12} = L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{13} = L_{31} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{14} = L_{41} = L_{23} = L_{32} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{24} = L_{42} &= B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{55} \\
 L_{34} = L_{43} &= D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{45} \\
 L_{44} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{44} \\
 L_{15} = -L_{51} &= \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{25} &= -L_{52} = \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial y} \\
L_{35} &= -L_{53} = \left( \frac{B_{12}}{R} - A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{26}}{R} - A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
L_{45} &= -L_{54} = \left( \frac{B_{26}}{R} - A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{22}}{R} - A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
L_{55} &= A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A_{22}}{R^2} + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \omega^2 p
\end{aligned}$$

式中:  $N_x, N_y, N_{xy}, \omega, q$  分别为侧向载荷(对稳定问题)、振动频率(对振动问题)、横向载荷(对弯曲问题)。

引入以下无量纲量:

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{x}{L}, \quad \theta = \frac{y}{R}, \quad U = \frac{u}{h}, \quad V = \frac{v}{h}, \\
W &= \frac{w}{h}, \quad p = \frac{qL^2}{h}, \quad \alpha = \frac{L}{R}
\end{aligned} \quad (13-6)$$

这样(1)可改写为相应无量纲形式,具体形式略。

任意铺设复合材料圆柱壳横向弯曲问题求解可归结为求解偏微分方程组式(13-5)在横向弯曲圆柱壳边界条件下边值问题。任意铺设复合材料圆柱壳振动、稳定问题求解在数学上可归结为求解偏微分方程组式(13-5)在圆柱壳边界条件下特征值问题。

## 13.2 圆柱壳线性力学问题一般解析解的建立

本书采用位移法求解。

### 1. 通解的推导

本节采用位移法求解,设

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i n \pi \alpha \xi} e^{i n \theta} \\
 V &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i n \pi \alpha \xi} e^{i n \theta} \\
 \Phi_x &= \sum_{-\infty}^{\infty} O X e^{i n \pi \alpha \xi} e^{i n \theta} \\
 \Phi_y &= \sum_{-\infty}^{\infty} P X e^{i n \pi \alpha \xi} e^{i n \theta} \\
 W &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi \alpha \xi} e^{i n \theta}
 \end{aligned} \tag{13-7}$$

式中:  $i$  为虚数单位;  $n$  为整数;  $s$  为特征根。

将式(13-7)代入式(13-5), 当  $m$  不为 0 时, 可推得有关  $s$  的 10 次特征代数方程

$$\begin{aligned}
 S_{100}s^{10} + S_{91}s^9 + S_{82}s^8 + S_{73}s^7 + S_{64}s^6 + S_{55}s^5 + \\
 S_{46}s^4 + S_{37}s^3 + S_{28}s^2 + S_{19}s + S_{010} = 0
 \end{aligned} \tag{13-8}$$

上式中  $S_{kl}$  可由行列式运算而得, 具体形式略。

对于一般铺设的复合材料圆柱壳弯曲问题, 对应于每个  $n$ , 式(13-8)可能有  $K$  对共轭复根  $c_k \pm d_k i$  ( $k=1, K$ )、 $M$  个实根  $c_m$  ( $m=1, M$ )。对弯曲问题,  $K$  为 5,  $M$  为 0; 对稳定振动问题一般  $K$  小于 5,  $M$  大于 0, 但存在以下关系

$$10 = 2K + M$$

根据双曲正弦、双曲余弦函数、正弦、余弦函数奇偶性, 采用第 3 章类似的步骤, 可以推得的实数形式级数位移通解合写如下:

$$\begin{aligned}
 (U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) = \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K (O_{1kn}, P_{1kn}, OX_{1kn}, PX_{1kn}, Q_{1kn}) \frac{\sinh n d_k \xi \sin n(c_k(1-\xi) - \theta)}{\sinh n d_k} + \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K (O_{2kn}, P_{2kn}, OX_{2kn}, PX_{2kn}, Q_{2kn}) \frac{\sinh n d_k (1-\xi) \sin n(c_k \xi + \theta)}{\sinh n d_k} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K (O_{3kn}, P_{3kn}, OX_{3kn}, PX_{3kn}, Q_{3kn}) \frac{\sinh nd_k \xi \cos n(c_k(1-\xi) - \theta)}{\sinh nd_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K (O_{4kn}, P_{4kn}, OX_{4kn}, PX_{4kn}, Q_{4kn}) \frac{\sinh nd_k (1-\xi) \cos n(c_k \xi + \theta)}{\sinh nd_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2K+1}^{10} (O_{1mn}, P_{1mn}, OX_{1mn}, PX_{1mn}, Q_{1mn}) \frac{\sin nc_m (1-\xi) - \theta}{\sin nc_m} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2K+1}^{10} (O_{2mn}, P_{2mn}, OX_{2mn}, PX_{2mn}, Q_{2mn}) \frac{\sin nc_m (c_m \xi + \theta)}{\sin nc_m} \quad (13-9)
\end{aligned}$$

将式(13-9)中对应于共轭复根  $c_k \pm d_k i$  ( $k=1, K$ ) 的级数解部分代入式(13-5)的任意四式可得 16 组线性方程,从基本解的独立性出发,用计算程序可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix} \quad (13-10)$$

$$\begin{bmatrix} OX_{1kn} \\ OX_{2kn} \\ OX_{3kn} \\ OX_{4kn} \\ PX_{1kn} \\ PX_{2kn} \\ PX_{3kn} \\ PX_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX_{11k} & -TX_{21k} & TX_{13k} & -TX_{23k} \\ TX_{21k} & -TX_{11k} & TX_{23k} & -TX_{13k} \\ TX_{31k} & -TX_{41k} & TX_{33k} & -TX_{43k} \\ TX_{41k} & -TX_{31k} & TX_{43k} & -TX_{33k} \\ SX_{11k} & -SX_{21k} & SX_{13k} & -SX_{23k} \\ SX_{21k} & -SX_{11k} & SX_{23k} & -SX_{13k} \\ SX_{31k} & -SX_{41k} & SX_{33k} & -SX_{43k} \\ SX_{41k} & -SX_{31k} & SX_{43k} & -SX_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix}$$

$$(13-11)$$

对于振动稳定问题存在实根解,将式(13-9)中实根  $c_m$  ( $m=1, M$ ) 的  $\frac{\sin n(c_m(1-\xi)-\eta)}{\sin nc_m}$ 、 $\frac{\sin n(c_m\xi+\eta)}{\sin nc_m}$  级数部分代入式(13-5)中任意4式,同样可得类似式(13-10)和式(13-11)的系数转换矩阵,将面内位移  $U$ 、 $V$  转角位移  $\Phi_x$ 、 $\Phi_y$  系数转换用挠度  $W$  系数表示,可大大降低计算量。

当  $n$  等于0时,设

$$U = U_y e^{i\eta} \quad V = V_y e^{i\eta} \quad \Phi_x = \Phi_{xy} e^{i\eta} \quad \Phi_y = \Phi_{yy} e^{i\eta} \quad W = W_y e^{i\eta} \quad (13-12)$$

将式(13-12)代入式(13-5)可得相应6阶控制方程及相应特征根:  
 $\pm c_{01}, \pm c_{02} \pm id_{02}$ 。

对于规则非对称正交铺设层合圆柱壳、规则反对称圆柱壳,上面关系矩阵不成立,解形式发生变化,可另外给出相应解。

当  $n$  为0时,式(13-5)转化为常微分方程组,按常微分方程组一般解法可得到圆柱壳补充解。对于弯曲问题,补充解如下:

$$\begin{aligned} W^{**} = & t_1 + t_2(\xi - 0.5) + W_{x1} \frac{\sinh(c_{01}\xi)}{\sinh(c_{01})} + W_{x2} \frac{\sinh c_{01}(1-\xi)}{\sinh(c_{01})} + \\ & W_{x3} \frac{\sinh(c_{02}\xi)\sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02})\sin(d_{02})} + W_{x4} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi)\sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02})\sin(d_{02})} + \\ & W_{x5} \frac{\sinh(c_{02}\xi)\sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02})\sin(d_{02})} + W_{x6} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi)\sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02})\sin(d_{02})} \end{aligned} \quad (13-13)$$

$$\begin{aligned} U^{**} = & t_3 + t_4(\xi - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\ & U_{x1} \frac{\sinh(c_{01}\xi)}{\sinh(c_{01})} + U_{x2} \frac{\sinh c_{01}(1-\xi)}{\sinh(c_{01})} + \\ & U_{x3} \frac{\sinh(c_{02}\xi)\sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02})\sin(d_{02})} + U_{x4} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi)\sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02})\sin(d_{02})} + \end{aligned}$$

$$U_{x5} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + U_{x6} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} \quad (13-14)$$

$$\begin{aligned} V^{**} = & t_6 + t_7(\xi - 0.5) + t_8(\xi - 0.5)^2 + \\ & V_{x1} \frac{\sinh(c_{01}\xi)}{\sinh(c_{01})} + V_{x2} \frac{\sinh c_{01}(1-\xi)}{\sinh(c_{01})} + \\ & V_{x3} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + V_{x4} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_{02})} + \\ & V_{x5} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + V_{x6} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} \end{aligned} \quad (13-15)$$

$$\begin{aligned} \Phi_x^{**} = & t_9 + \Phi_{xx1} \frac{\sinh(c_{01}\xi)}{\sinh(c_{01})} + \Phi_{xx2} \frac{\sinh c_{01}(1-\xi)}{\sinh(c_{01})} + \\ & \Phi_{xx3} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + \Phi_{xx4} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_{02})} + \\ & \Phi_{xx5} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + \Phi_{xx6} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} \end{aligned} \quad (13-16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^{**} = & t_{10} + \Phi_{yx1} \frac{\sinh(c_{01}\xi)}{\sinh(c_{01})} + \Phi_{yx2} \frac{\sinh c_{01}(1-\xi)}{\sinh(c_{01})} + \\ & \Phi_{yx3} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + \Phi_{yx4} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_0) \sin(d_{02})} + \\ & \Phi_{yx5} \frac{\sinh(c_{02}\xi) \sin(d_{02}\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} + \Phi_{yx6} \frac{\sinh c_{02}(1-\xi) \sin d_{02}(1-\xi)}{\sinh(c_{02}) \sin(d_{02})} \end{aligned} \quad (13-17)$$

对于振动稳定问题,补充解对应轴对称振型、轴对称失稳模式,可



按常微分方程理论求解处理,本书略。

从线性偏微分方程解得可迭加性出发,在式(13-13)~式(13-17)基础上补充补充解及特解,对于边值问题可得一般解析解:

$$\begin{aligned} W &= W^* + W^{**} + W^{***} \\ U &= U^* + U^{**} + U^{***} \\ V &= V^* + V^{**} + V^{***} \\ \Phi_x &= \Phi_x^* + \Phi_x^{**} + \Phi_x^{***} \\ \Phi_y &= \Phi_y^* + \Phi_y^{**} + \Phi_y^{***} \end{aligned} \quad (13-18)$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$ 、 $\Phi_x^{**}$ 、 $\Phi_y^{**}$  为弯曲问题特解(对于振动、稳定问题,特解不存在)。

## 2. 弯曲问题特解的建立

对于横向弯曲问题,本书引入势函数  $\Phi$ ,引进微分算子  $D_0$ ,它是以算子  $L_{ij}$ 组成得  $5 \times 5$  行列式,并令  $D_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 表示给该行列式的代数余子式。使

$$U = D_{51}\Phi \quad V = D_{52}\Phi \quad \Phi_{,x} = D_{53}\Phi \quad \Phi_{,y} = D_{54}\Phi \quad W = D_{55}\Phi \quad (13-19)$$

依照线性代数理论,基本微分方程可以写成

$$D_0\Phi = p$$

展开为

$$\begin{aligned} &SS_{100} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^{10}} + SS_{91} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^9 \partial \theta} + SS_{82} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^8 \partial \theta^2} + SS_{73} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^7 \partial \theta^3} + SS_{64} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^6 \partial \theta^4} + \\ &SS_{55} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^5 \partial \theta^5} + SS_{46} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^4 \partial \theta^6} + SS_{37} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^3 \partial \theta^7} + SS_{28} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^8} + \\ &SS_{19} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \xi \partial \theta^9} + SS_{010} \frac{\partial^{10}\Phi}{\partial \theta^{10}} + SS_{80} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^7 \partial \theta} + SS_{62} \frac{\partial^8\Phi}{\partial \xi^6 \partial \theta^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& SS_{53} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \theta^3} + SS_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \theta^4} + SS_{35} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \theta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^6} + \\
& SS_{17} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi \partial \theta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \theta^8} + SS_{60} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + SS_{51} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \theta} + SS_{42} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + \\
& SS_{33} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \theta^3} + SS_{24} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + SS_{15} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \theta^5} + SS_{06} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} + \\
& SS_{40} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + SS_{31} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \theta} + SS_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + SS_{13} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \theta^3} + SS_{04} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} = p
\end{aligned}$$

这样根据载荷选择  $\Phi$ , 即可求得特解。

### 3. 求解模式

对于弯曲静力问题, 将式(13-13) ~ 式(13-17)中多项式部分、梁函数部分代入式(13-5)可建立 30 个独立方程, 这样式(13-13) ~ 式(13-17)中共有 10 个独立未知数。在实际计算中,  $n$  不可能取无穷大, 设最大取  $N$ , 这样一般解析解式(13-18)共有  $20N + 10$  个独立未知数。对于任意铺设圆柱壳, 每边有 5 个边界条件, 共有 10 个边界条件。将一般解析解代入 10 个边界条件中, 形成 10 个方程, 将所得每个方程展成  $20N + 10$  项傅里叶级数。根据傅立叶级数的正交性, 可以得到  $20N + 10$  个线性代数方程。对于边值问题(弯曲问题), 所建立的  $20N + 10$  方程为非奇次方程, 可以求解  $20N + 10$  个独立未知数, 考虑横向剪切变形的圆柱壳弯曲问题由此得解。对于特征值问题(振动、稳定问题), 轴对称振动模态、轴对称失稳模式可按常微分方程理论单独求解, 进而求得轴对称补充解, 将轴对称补充解代入圆柱壳两端边界条件, 形成 10 阶特征矩阵, 使这一特征矩阵行列式值为 0 的  $N_x, N_y, N_{xy}, \omega$  即为实际失稳载荷、实际频率; 对于非轴对称振动稳定问题, 对应于每个  $n$ , 将式(13-5)代入圆柱壳的 10 个边界条件中, 形成一个 20 阶线性代数方程, 使这一方程为奇异方程的  $N_x, N_y, N_{xy}, \omega$  即为实际失稳载荷、实际频率。这样考虑剪切变形的圆柱壳线性力学问题可以按新型复级数体系统一处理。

### 13.3 解析解数值验证及结构力学特性总体分析

本书计算涉及具有两种边界条件圆柱壳：两端简支固定圆柱壳，两端固支固定圆柱壳。具体边界条件如下：

简支固定壳边界条件为：

$$\xi = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad M_x = 0 \quad \Phi_y = 0 \quad W = 0$$

固支固定壳边界条件为：

$$\xi = 0, 1 \quad U = 0 \quad V = 0 \quad \Phi_x = 0 \quad \Phi_y = 0 \quad W = 0$$

#### 1. 圆柱壳位移、内力总体分布及边界收敛情况验证

为了考查本书解对边界条件收敛性，本书针对两层 $[0/45]_T$ 铺设层合圆柱壳在 $P\cos(\theta)$ 载荷作用下的横向弯曲进行计算。

所选复合材料常数为

$$E_1 = 145\text{GPa} \quad E_2 = 9.6\text{GPa} \quad G_{12} = 4.1\text{GPa}$$

$$G_{13} = 4.1\text{GPa} \quad G_{23} = 4.1\text{GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

结构几何、载荷参数为 $L = R = 1\text{m}$   $h = 0.05\text{m}$   $P = 10^4\text{N/m}^2$

为了显示任意铺设层合板位移 $w, u, v, \Phi_x, \Phi_y, M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ 总体分布情况，下面给出表13-1~表13-11。

表13-1  $[0/45^\circ]_T$ 铺设层合圆柱壳挠度 $w \times 10^5$ 分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-0.63547	-0.98099	-1.02290	-0.98099	-0.63547	0.000
0.2	0.000	-0.40866	-0.41087	-0.31611	-0.19542	0.15916	0.000
0.5	0.000	0.63547	0.98099	1.02290	0.98099	0.63547	0.000
0.8	0.000	0.15916	-0.19542	-0.31611	-0.41087	-0.40866	0.000
1.0	0.000	-0.63547	-0.98099	-1.02290	-0.98099	-0.63547	0.000

表 13-2  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳轴向位移  $u \times 10^7$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.71462	0.21656	0.00000	-0.21656	-0.71462	0.000
0.2	0.000	-1.63680	-2.86700	-0.30686	-3.00150	-2.07850	0.000
0.5	0.000	-0.71462	-0.21656	0.00000	0.21656	0.71462	0.000
0.8	0.000	2.07850	3.00150	0.30686	2.86700	1.63680	0.000
1.0	0.000	0.71462	0.21656	0.0000	-0.21656	-0.71462	0.000

表 13-3  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳轴向位移  $v \times 10^6$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-0.62949	-0.28984	0.00000	0.28984	0.62949	0.000
0.2	0.000	1.04700	1.98750	2.19000	2.16660	1.43600	0.000
0.5	0.000	0.62949	0.28984	0.00000	-0.28984	-0.62949	0.000
0.8	0.000	-1.43600	-2.16660	-2.19000	-1.98750	-1.04700	0.000
1.0	0.000	-0.62949	-0.28984	0.0000	0.28984	0.62949	0.000

表 13-4  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳环向位移  $\Phi_x \times 10^4$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.24865	0.24591	0.08327	0.00000	-0.08327	-0.24591	-0.24865
0.2	0.26915	0.09395	-0.06329	-0.10263	-0.11475	-0.05803	0.11548
0.5	-0.24865	-0.24591	-0.08327	0.00000	0.08327	0.24591	0.24865
0.8	-0.11548	0.05803	0.11475	0.10263	0.06329	-0.09395	-0.26915
1.0	0.24865	0.24591	0.08327	0.00000	-0.08327	-0.24591	-0.24865

表 13-5  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳轴向位移  $\Phi_y \times 10^5$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	0.16312	0.10292	0.00000	-0.10292	-0.16312	0.000

(续)

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.2	0.000	-0.53528	-0.86836	-0.93928	-0.93197	-0.63609	0.000
0.5	0.000	-0.16312	-0.10292	0.00000	0.10292	0.16312	0.000
0.8	0.000	0.63609	0.93197	0.93928	0.86836	0.53528	0.000
1.0	0.000	0.16312	0.10292	0.0000	-0.10292	-0.16312	0.000

表 13-6  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳轴向弯矩  $M_x$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.000	-115.86	-134.62	-135.36	-134.62	-115.86	0.000
0.2	0.000	-51.255	-47.776	-41.829	-35.422	-20.349	0.000
0.5	0.000	-20.349	134.62	135.366	134.62	-20.349	0.000
0.8	0.000	-20.349	-35.422	-41.829	-47.776	-51.255	0.000
1.0	0.000	-115.86	-134.62	-135.36	-134.62	-115.86	0.000

表 13-7  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳环向弯矩  $M_y$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-37.810	-72.487	-82.561	-83.406	-82.561	-72.487	-37.810
0.2	12.777	-11.055	-22.026	-25.774	-29.000	-33.744	-36.145
0.5	37.810	72.487	82.561	83.406	82.561	72.487	37.810
0.8	-36.145	-33.744	-29.000	-25.774	-22.026	-11.055	12.777
1.0	-37.810	-72.487	-82.561	-83.406	-82.561	-72.487	-37.810

表 13-8  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳扭矩  $M_{xy}$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-40.484	-68.567	-78.914	-79.855	-78.914	-68.567	-40.484
0.2	9.6994	-10.612	-21.086	-24.677	-27.686	-31.765	-34.720

(续)

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.5	40.484	68.567	78.914	79.855	78.914	68.567	40.484
0.8	-34.720	-31.765	-27.686	-24.677	-21.086	-10.612	9.6994
1.0	-40.484	-68.567	-78.914	-79.855	-78.914	-68.567	-40.484

表 13-9  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳面内轴向力  $N_x$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-3069.6	-3754.4	-4135.3	-4184.4	-4135.3	-3754.4	-3069.0
0.2	1557.9	3638.3	-768.3	-1293.1	-1787.4	-2684.2	-3455.0
0.5	3069.6	3754.4	4135.3	4184.4	4135.3	3754.4	3069.6
0.8	-3455.0	-2684.2	-1787.4	-1293.1	-768.3	3638.3	1557.9
1.0	-3069.0	-3754.4	-4135.3	-4184.4	-4135.3	-3754.4	-3069.6

表 13-10  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳面内环向力  $N_y$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-3467.5	-7824.5	-9669.6	-9870.2	-9669.6	-7824.5	-3467.5
0.2	1464.7	-1725.3	-2909.8	-3050.1	-3066.4	-3110.5	-3607.8
0.5	3467.5	7824.5	9669.6	9870.2	9669.6	7824.5	3467.5
0.8	-3607.8	-3110.5	-3066.4	-3050.1	-2909.8	-1725.3	1464.7
1.0	-3467.5	-7824.5	-9669.6	-9870.2	-9669.6	-7824.5	-3467.5

表 13-11  $[0/45^\circ]_T$  铺设层合圆柱壳面内剪力  $N_{xy}$  分布

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	-4975.4	-5290.2	-5355.3	-5359.0	-5355.3	-5290.2	-4975.4
0.2	2204.1	996.72	-722.5	-1656.0	-2587.3	-4266.2	-5279.1
0.5	4975.4	5290.2	5355.3	5859.0	5355.3	5290.2	4975.4

(续)

$\xi$ $0.5\theta/\pi$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.8	-5279.1	-4266.2	-2587.3	-1656.0	-722.5	996.72	2204.1
1.0	-4975.4	-5290.2	-5355.3	-5359.0	-5355.3	-5290.2	-4975.4

从表 13-1 ~ 表 13-5 可看出,本章解可精确地满足了位移、力矩边界条件。从各表数值量值可,发现对于承受横向载荷的两端简支固定圆柱壳,沿厚度方向位移—挠度  $w$  是主要位移,环向位移  $v$ 、轴向位移  $u$  是次要位移。 $v$ 、 $u$  互相比,  $v$  又约比  $u$  高一个数量级,而  $w$  又约比  $v$  高一个数量级,如此  $w$  比  $u$  约高两个数量级。对于转角函数  $\Phi_x$ 、 $\Phi_y$ ,  $\Phi_x$  比  $\Phi_y$  约高一个数量级,  $\Phi_y$  与挠度数量级相当。而鉴于这是对两端简支固定圆柱壳计算所得结果,由此可见对圆柱壳面内边界条件对圆柱壳位移分布又重大影响,面内位移、面内边界约束与横向挠度位移、横向边界约束的相互关联是壳体重要特点,这些与薄圆柱壳结论类似。

综合分析表 13-6 ~ 表 13-11,可发现圆柱壳体内力矩要比面内力小,这说明即使复合材料圆柱壳由于受面内位移、面内边界约束与横向位移、横向边界约束互相关联使无矩状态一般较难实现,但面内力仍占主要地位,这对提高复合材料圆柱的承载能力是有积极意义的。同时也注意到对于中厚圆柱壳内力矩虽然比面内力小,但已不象薄圆柱壳中那样显著。具体比较也可发现,内力矩基本上处在一个数量级上,由于弯扭耦合效应的影响扭矩与弯矩基本上在一个数量级上。同样面内力也基本上处在一个数量级上,拉剪耦合效应使剪力并没有成为次要内力。复合材料结构特有的耦合效应、横向剪切效应使复合材料壳体内力、内力矩呈现出比各向同性圆柱壳更加复杂的规律。

## 2. 圆柱壳位移、内力对称性及铺层对称性分析

通过对复合材料圆柱壳材料、边界条件和载荷对称情况综合分析,可以得到如下结论:对铺设方式一定的复合材料圆柱壳,当复合

材料圆柱壳材料、边界条件和载荷呈中心对称时,具有圆柱壳挠度呈中心对称,而面内位移  $u, v$  及转角函数  $\Phi_x, \Phi_y$  呈反中心对称,相应地各内力内力矩也呈中心对称,具体表示为

$$\begin{aligned} w(\xi, \theta) &= W(1 - \xi, -\theta) \\ u(\xi, \theta) &= -U(1 - \xi, -\theta) \\ v(\xi, \theta) &= -V(1 - \xi, -\theta) \\ \Phi_x(\xi, \theta) &= -\Phi_x(1 - \xi, -\theta) \\ \Phi_y(\xi, \theta) &= -\Phi_y(1 - \xi, -\theta) \end{aligned}$$

表 13-1 ~ 表 13-5 反映了上述位移对称性,表 13-6 ~ 表 13-11 显示了圆柱壳内力、内力矩对称性。在数值计算中引入对称性结论,可有效地降低计算量。

与经典理论的薄任意铺设层合板类似,层合圆柱壳物理量与计算所选坐标系亦无关,以此通过坐标转换可以发现:  $(\theta_1/\theta_2/\cdots/\theta_N)_T$  铺设层合圆柱壳与  $(-\theta_1/-\theta_2/\cdots/-\theta_N)_T$  铺设层合圆柱壳位移对称。为显示圆柱壳铺层对称性,选择  $[-30^\circ]_T$  与  $[30^\circ]_T$  等铺设方式的两端固支固定层合圆柱壳进行比较计算,结构参数、载荷参数同上。所得圆柱壳中心挠度  $W$ 、弯矩  $M_x, M_y$ 、扭矩  $M_{xy}$ 、平面力  $N_x, N_y, N_{xy}$  的结果反映在表 13-12 中。表 13-12 具体反映了圆柱壳铺层对称性。

表 13-12 铺层对称性验证计算结果

铺层 方式	$w(0.5, 0)$ /m	$M_x(0.5, 0)$ /N	$M_y(0.5, 0)$ /N	$M_{xy}(0.5, 0)$ /N	$N_x(0.5, 0)$ /(N/m)	$N_y(0.5, 0)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5, 0)$ /(N/m)
$[-30^\circ]_T$	-0.000012	-110.410	-36.470	55.190	-9458.90	-7993.20	5173.20
$[30^\circ]_T$	-0.000012	-110.410	-36.470	-55.190	-9458.90	-7993.20	-5173.20

### 3. 圆柱壳铺设角、铺层敏感性分析

在实际工艺制作中纤维取向的微量差异对层合板力学性能会有一些影响,其程度多大是工程界所关心的。采用与第一节中相同的材料、结构参数、载荷参数的基础上,本章针对  $[0/\theta]_T$  任意铺设两端简支固定层合圆柱壳,逐渐减小  $\theta$ ,将所得圆柱壳中心  $(0.5, 0)$  处挠度、内



力、内力矩计算结果与 $[0]_T$ 铺设圆柱壳中心 $(0.5,0)$ 相应值比较,据此探讨铺设角微小变化及由此带来铺设方式的变异对层合板力学特性的影响。

表 13-13 微小  $\theta$  的 $[0/\theta]_T$ 铺设层合圆柱壳与 $[0]_T$   
层合圆柱壳计算结果比较

$\theta$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5,0)$ /N	$M_y(0.5,0)$ /N	$M_{xy}(0.5,0)$ /N	$N_x(0.5,0)$ /(N/m)	$N_y(0.5,0)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5,0)$ /(N/m)
1	-0.23554	-289.82	-8.1903	-2.4720	-2184.50	-9188.90	-113.06
0.1	-0.23563	-289.87	-8.1503	-0.2471	-2174.80	-9188.40	-11.294
0.01	-0.23563	-289.87	-8.1499	-0.0247	-2174.70	-9188.40	-1.1294
0.001	-0.23563	-289.87	-8.1499	-0.0025	-2174.70	-9188.40	-0.1129
0.000	-0.23563	-289.87	-8.1499	0.0000	-2174.70	-9188.40	0.0000

从表 13-13 发现铺设角微小改变对圆柱壳位移、内力矩、轴向面内力、环向面内力影响不大,而且  $\theta$  误差越小由此带来的板刚度内力差异越小。但面内剪力受  $\theta$  影响较大,面内剪力对  $\theta$  较为敏感,当  $\theta$  从  $0^\circ$  增加到  $1^\circ$ ,  $N_{xy}$  的绝对值就从 0.0 增加到 113.06,虽然远小于轴向面内力、环向面内力,但数值上已与壳体内力矩相当。考虑到对薄圆柱壳分析也可得到相似结论,结合本章分析,可以认为在圆柱壳制作中纤维精确铺设是必要的。然而铺设角  $\theta$  逼近  $0^\circ$  时,表中显示的 $[0/\theta]_T$ 铺设层合圆柱壳各物理量已逼近  $\theta$  为  $0^\circ$  的 $[0]_T$ 层合圆柱壳相应值,这从另一侧面验证了本书解的正确性。

### 13.4 圆柱壳力学结构数值研究部分

下面按照上述方法进行数值计算,以研究任意铺设对层合圆柱壳刚度内力的影响。

为察材料各向异性程度对圆柱壳弯曲力学状态的影响,本书选择 2 种复合材料进行分析,其材料 1 为强各向异性材料,材料 2 为弱各向异性材料,其材料参数见表 13-14。

表 13-14 复合材料的工程参数

材料特性	$E_1/\text{GPa}$	$E_2/\text{GPa}$	$G_{12}/\text{GPa}$	$G_{13}/\text{GPa}$	$G_{23}/\text{GPa}$	$\gamma_{12}$
强各向异性	144.79	9.65	4.14	4.14	3.212	0.3
弱各向异性	143.6	75.4	42.1	25.6	42.7	0.44

## 1. 铺设参数对层合壳体位移内力影响数值结果部分

计算采取中厚圆柱壳(本书取  $R/h=10$ ) 进行计算, 取  $L=1\text{m}$ ,  $R=1\text{m}$ ,  $h=0.1\text{m}$ , 载荷选为均布压力  $q$ , 取  $q=-10000\text{N/m}^2$ , 材料选弱各向异性材料 2。本书给出表 13-15 ~ 表 13-19 分别考察两端简支固定(SS)角铺设圆柱壳中心挠度及中心处弯矩( $M_x, M_y$ )、扭矩( $M_{xy}$ )、面内力( $N_x, N_y, N_{xy}$ )随铺设层数、铺设角  $\beta$  变化趋势。

表 13-15 材料 1 的单层  $\beta$  角铺设 SS 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(\circ)$	$w \times 10^5$ /m	$M_r$ /N	$M_\theta$ /N	$M_{r\theta}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
0	-0.69197	554.970	11.096	0	-1330.60	-6704.10	0
15	-0.69980	518.610	45.350	-128.20	-5189.40	-7117.90	-1201.20
30	-0.55213	312.320	100.700	160.900	-10184.00	-8667.200	-5499.90
45	-0.29546	95.906	80.419	77.637	-7167.70	-9926.80	-6737.40
60	-0.15485	18.048	31.452	18.157	-3032.90	-10284.00	-4773.70
75	-0.09360	1.2884	2.6594	0.84803	-820.21	-10335.00	-2293.90
90	-0.06993	1.0655	-0.31966	0	-1773.33	-10178.00	0

表 13-16 材料 1 的  $[\beta/-\beta]_T$  铺设 SS 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(\circ)$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.73042	478.28	42.42	29.89	-5323.3	-7420.50	-2491.30
30	-0.57469	259.18	81.16	143.84	-10318.00	-8956.00	-2874.30
45	-0.29479	73.23	57.18	180.05	-7068.10	-10159.00	-1408.20
60	-0.13789	4.784	21.06	131.63	-2932.30	-10572.00	-4789.90
75	-0.08080	-1.415	3.691	63.19	-797.93	-10279.00	-76.57
90	-0.06993	1.0655	-0.31966	0	-1773.33	-10178.00	0

表 13-17 材料 1 的 $[\beta/-\beta/\beta]_T$ 铺设 SS 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.66978	503.01	44.057	112.61	-5175.30	-7097.10	-399.33
30	-0.54862	278.59	89.192	127.50	-10147.00	-8645.30	-1826.60
45	-0.28700	73.266	59.188	50.789	-7070.80	-10051.00	-2215.50
60	-0.13750	8.1235	13.363	7.2573	-2896.20	-10481.00	-15195.00
75	-0.08206	-0.81920	-0.30417	0.06913	-780.340	-10282.00	-727.46

表 13-18 材料 1 的 $[\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta/-\beta]_T$ 铺设  
SS 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.69596	507.89	444.73	78.244	-5149.00	-7077.30	-656.21
30	-0.54618	293.17	94.06	34.742	-10016.50	-8579.80	-798.73
45	-0.28998	82.30	66.87	44.162	-7010.50	-10058.00	-383.86
60	-0.13944	8.949	13.58	32.53	-2383.70	-10608.00	-116.80
75	-0.08125	-0.9946	-0.7745	15.79	-777.770	-10277.00	-15.787

表 13-19 材料 2 的 $[\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta/-\beta]_T$   
铺设 SS 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.69510	508.38	444.97	40.392	-5147.10	-7068.80	-132.38
30	-0.54577	292.28	93.81	46.862	-10027.00	-8579.40	-601.68
45	-0.28937	81.281	66.11	20.078	-7016.30	-10053.00	-732.80
60	-0.13918	8.7993	13.28	3.1958	-2881.80	-10590.00	-504.00
75	-0.08135	-0.9533	-0.9461	0.0170	-776.99	-10277.00	-241.45

本章又针对两端固支固定(CC)圆柱壳进行相应分析计算。计算中取 $L=1\text{m}$ , $R=1\text{m}$ , $h=0.1\text{m}$ , $q=-10000\text{N/m}^2$ ,表 13-20~表 13-

24 给出所选的强各向异性材料 1 层合圆柱壳的中心挠度及弯矩 ( $M_x$ ,  $M_y$ )、扭矩 ( $M_{xy}$ )、面内力 ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) 随铺设角  $\theta$  变化趋势。

表 13 - 20 材料 1 的单层  $\beta$  角铺设 CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
0	-0.43564	261. 14	5. 2214	0	-807. 35	-4220. 10	0
15	-0.45043	254. 74	22. 304	62. 089	-3217. 00	-4569. 60	-744. 75
30	-0.41204	189. 56	60. 826	95. 560	-7316. 20	-6375. 60	-3951. 10
45	-0.26839	79. 791	65. 464	61. 999	-6229. 70	-8761. 10	-5855. 80
60	-0.15739	22. 583	36. 717	20. 632	-2842. 30	-9861. 30	-4473. 70
75	-0.10098	5. 3590	7. 9842	2. 2572	-764. 94	-10280. 0	-2139. 30
90	-0.07071	0. 1995	0. 0599	0	160. 12	-10286. 00	0

表 13 - 21 材料 1 的  $[\beta/-\beta]_T$  铺设 CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.51406	225. 79	20. 686	19. 804	-3544. 41	-5204. 70	0
30	-0.47318	144. 26	42. 071	110. 36	-7863. 10	-7170. 90	0
45	-0.28577	54. 281	33. 145	160. 49	-6152. 40	-9272. 20	0
60	-0.14468	11. 259	9. 4439	127. 13	-2626. 40	-10361. 00	0
75	-0.08319	0. 7117	0. 4449	63. 565	-704. 650	-10404. 00	0

表 13 - 22 材料 1 的  $[\beta/-\beta/\beta]_T$  铺设 CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.44418	248. 60	21. 806	54. 271	-3165. 80	-4506. 30	-244. 280
30	-0.40024	175. 410	55. 830	76. 616	-7056. 30	-6195. 90	-1270. 20
45	-0.25967	67. 723	53. 221	43. 135	-5999. 00	-8768. 70	-1879. 60
60	-0.13901	12. 976	18. 771	9. 1716	-2655. 50	-10173. 50	-1393. 30
75	-0.08394	1. 3093	1. 8355	0. 4959	-706. 430	-10358. 00	-658. 560

表 13-23 材料 1 的  $[\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta/-\beta]_T$  铺设  
CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.43937	251.67	22.062	4.3654	-3113.60	-4455.90	0
30	-0.38497	190.110	60.880	23.113	-6633.00	-5910.50	0
45	-0.25727	85.5612	69.082	36.182	-5840.30	-8451.70	0
60	-0.14203	17.144	24.961	30.727	-2563.90	-10248.00	0
75	-0.08278	1.0908	1.1361	15.177	-699.380	-10369.00	0

表 13-24 材料 1 的  $[\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta/-\beta/\beta]_T$  铺设  
CC 圆柱壳中心挠度、内力值

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x$ /N	$M_y$ /N	$M_{xy}$ /N	$N_x$ /(N/m)	$N_y$ /(N/m)	$N_{xy}$ /(N/m)
15	-0.43754	252.221	22.079	19.077	-3106.80	-4438.00	-79.9910
30	-0.38468	189.470	60.772	26.803	-6662.60	-5917.20	-399.790
45	-0.25660	83.904	68.023	17.116	-5680.10	-8473.80	-593.240
60	-0.14141	16.805	24.896	4.2697	-2573.50	-10231.00	-450.080
75	-0.08287	1.1342	1.2803	0.1822	-699.950	-10365.00	-217.510

## 2. 剪切理论与经典理论比较计算数值结果

对于某一特定牌号的复合材料结构,横向剪切效应对结构力学特性影响程度很大程度上取决于板跨厚比  $R/h$ ,显然跨厚比越大,横向剪切影响越小。为具体反映跨厚比(横向剪切变形)对圆柱壳结构的影响程度,同样本书进行了对比计算。计算针对由材料 1、材料 2 制成、具有不同跨厚比的四边固支四边简支圆柱壳进行,层合板铺设方式为  $[0/45]_T$ 。载荷为均布压力  $q, q = -10000\text{N/m}^2, R = 1\text{m}, L = 1\text{m}$ 。为反映横向剪切效应影响,计算按本章给出的剪切理论解析解与第 5 章给出的经典理论解析解同时进行,结果反映在表 13-25 ~ 表 13-30。在表 13-25 ~ 表 13-30 每格中,\* 位置的数值为剪切理论解,\*\* 位置的数值为经典理论解。

表 13-25 材料 1 $[45^\circ]_T$  的 CC 圆柱壳中心  
挠度及中心(0.5)内力

$h/(\circ)$	$w \times 10^5$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0.20	-0.12055 *	103.97	78.907	69.282	-5924.500	-8169.37	-5568.90
	-0.0599 **	281.05	228.68	214.96	-2317.80	-3489.50	-2178.70
0.05	-0.61720	34.101	28.582	27.583	-6827.30	-9767.800	-6417.50
	-0.64409	-40.185	-32.6980	-30.735	-6481.70	-9607.50	-6092.60
0.02	-1.5300	2.4482	2.0693	2.0114	-7381.70	-10243.00	-6938.60
	-1.5688	2.2056	1.7946	1.6869	-7323.50	-10279.00	-6884.00
0.01	-2.7047	-0.33392	-0.27999	-0.27030	-7622.30	-10054.00	-7164.80
	-2.7224	-0.31320	-0.25484	0.23955	-7604.00	-10057.00	-7147.60

表 13-26 材料 1 $[45^\circ/0]_T$  的 CC 圆柱壳  
中心挠度及中心(0.5)内力

$h/(\circ)$	$w \times 10^5$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0.20	-0.14752 *	475.410	241.760	222.030	-3676.800	-7091.00	-3198.40
	-0.07178	268.600	5.49500	7.460	-1491.900	-2093.40	-1297.80
0.10	-0.38953	297.440	154.250	144.950	-4534.400	-9107.500	-3944.500
	-0.34632	105.770	44.2950	50.886	-3613.000	-6079.500	-3143.00
0.05	-0.09854	141.61	85.736	81.964	-5575.20	-10982.00	-4850.00
	-1.00430	8.9119	53.101	54.345	-5382.70	-9712.30	-4682.50
0.02	-2.3292	34.628	30.954	30.199	-6254.90	-10746.00	-5441.200
	-2.4244	30.256	29.848	29.253	-6217.30	-10694.00	-5408.50
0.01	-4.0803	14.120	14.876	14.580	-6548.30	-9951.700	-5696.400
	-4.0865	16.368	15.392	15.014	-6535.40	-10057.00	-5685.200

表 13-27 材料 1[45/-45]<sub>T</sub> 的 CC 圆柱壳

中心挠度及中心(0.5)内力

$h/(\circ)$	$w \times 10^5$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0.20	-0.11533 *	115.840	70.733	260.970	-5195.30	-7634.00	0
	-0.09133 *	201.250	122.89	193.610	-3550.20	-5631.900	0
0.10	-0.28577	54.281	33.145	160.490	-6152.40	-9272.20	0
	-0.28700	72.418	44.220	154.480	-5702.50	-8949.90	0
0.05	-0.61969	12.3050	7.5134	90.126	-6889.20	-10253.00	0
	-0.63455	13.8900	8.4810	89.970	-6783.60	-10284.00	0
0.02	-1.3727	-0.31641	-0.19321	36.981	-7396.40	-10141.00	0
	-1.3817	-0.36263	-0.22143	36.949	-7373.80	-10150.00	0
0.01	-2.5154	-0.07419	-0.04530	18.5760	-7632.10	-9987.600	0
	-2.5189	-0.07616	-0.04650	18.5670	-7624.80	-9986.900	0

表 13-28 材料 1[45]<sub>T</sub> 的 SS 圆柱壳

中心挠度及中心(0.5)内力

$h/(\circ)$	$w \times 10^5$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0.20	-0.13294	221.490	180.7605	17.038	-6537.800	-9012.90	-6145.40
	-0.11998	333.750	271.5700	255.270	-5576.200	-7839.00	-5241.50
0.10	-0.29546	95.906	80.419	77.637	-7167.70	-9926.80	-6737.40
	-0.29874	97.116	79.021	74.278	-7025.60	-9835.00	-6603.90
0.05	-0.60504	21.908	18.518	18.001	-7558.80	-10364.00	-7105.10
	-0.61455	18.829	15.321	14.401	-7536.60	-10399.00	-7084.20
0.02	-1.3509	-0.31091	-0.25172	-0.23553	-7784.300	-10198.00	-7317.100
	-1.3565	-0.41450	-0.34130	-0.32085	-7780.400	-10207.00	-7313.000
0.01	-2.44480	-0.33721	-0.28339	-0.27411	-7893.700	-10002.00	-7419.90
	-2.44441	-0.29200	-0.23760	-0.22334	-7843.200	-10001.00	-7419.50

表 13-29 材料 1 $[45/-45]_T$  的 SS 圆柱壳

中心挠度及中心(0.5)内力

$h/(^{\circ})$	$w \times 10^5$ /m	$M_x(0,0.5)$ /N	$M_y(0,0.5)$ /N	$M_{xy}(0,0.5)$ /N	$N_x(0,0.5)$ /(N/m)	$N_y(0,0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0,0.5)$ /(N/m)
0.20	-0.13167 -0.12592	218.960 288.260	165.680 217.400	310.510 298.330	-6224.80 -5715.90	-8961.70 -8432.90	-1806.60 -2340.50
0.10	-0.29479 -0.29842	73.227 80.770	57.176 62.956	180.050 180.630	-7068.10 -6978.10	-10159.00 -10159.00	-1408.200 -1540.90
0.05	-0.57702 -0.58312	16.313 16.663	14.261 14.616	94.175 94.308	-7473.300 -7450.200	-10411.00 -10440.00	-971.760 -1003.80
0.02	-1.2484 -1.2500	2.2702 2.2270	2.49440 2.50670	37.544 37.531	-7748.800 -7743.800	-10055.00 -10056.00	-626.093 -633.200

## 3. 耦合效应对圆柱壳静力学响应的影响研究

为研究拉弯耦合对任意铺设层合圆柱壳具体影响,可忽略拉弯耦合效应将任意铺设层合板视为各向异性圆柱壳进行计算,并将此结果与按真实的任意铺设层合圆柱壳计算所得相应结果比较,以反映拉弯耦合的影响。计算选取材料 1 的两端简支固定 SS 圆柱壳及两端固支固定 CC 圆柱壳解析进行,圆柱壳结构参数为  $L=1\text{m}$ ,  $R=1\text{m}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $q=-10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 13-30 和表 13-31 中。表 13-30 和表 13-31 每格中\*位置数值为按任意铺设解计算真实值,\*\*位置数值为按各向异性圆柱壳计算所得比值。

表 13-30 考虑拉弯耦合及忽略拉弯耦合两情况下材料

 $1[0/\beta]_T$  CC 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.14299	-213.66	-5.6982	0.00	-1199.10	-5648.60	0.000
15	-0.1482* -0.1391**	-200.64 -197.83	-13.148 -11.577	-27.234 -22.423	-3011.50 -2843.10	-6644.90 -6048.00	-618.06 -545.99



(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
30	-0.13342	-174.58	-39.710	-59.372	-5907.40	-8208.84	-2917.70
	-0.12116	-151.39	-21.354	-28.663	-5398.70	-7133.90	-2655.80
45	-0.09400	-114.39	-75.628	-71.833	-5194.80	-9327.20	-4480.00
	-0.08716	-91.969	-21.396	-18.291	-4834.50	-8461.00	-4168.80
60	-0.068176	-57.715	-99.534	-56.386	-2751.20	-9878.80	-3675.00
	-0.063751	-57.059	-15.991	-8.4353	-2595.00	-9301.00	-3534.20
75	-0.067303	-27.735	-111.24	-29.834	-11192.00	-10123.00	-1898.40
	-0.062284	-49.611	-11.078	-3.0237	-10488.00	-9652.40	-1865.80
90	-0.078399	-19.719	-116.360	0.000	-629.770	-10350.00	0.000
	-0.072781	-55.093	-7.8744	0.000	-583.800	-9834.30	0.000

表 13-31 考虑拉弯耦合及忽略拉弯耦合两情况下材料

1[0/ $\beta$ ]<sub>T</sub>SS 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.23563	-289.87	-8.14499	0.00	-2174.70	-9188.40	0.000
15	-0.21417	-277.33	-17.996	-38.954	-3996.70	-9276.20	-2035.50
	-0.21923	-252.52	-15.219	-28.839	-4962.60	-9474.00	-951.90
30	-0.15793	-221.35	-48.893	-74.572	-5842.30	-9517.00	-4602.50
	-0.16664	-161.40	-23.551	-31.595	-8285.70	-9945.20	-4055.10
45	-0.10229	-135.36	-83.406	-79.855	-4184.40	-9870.20	-5359.00
	-0.10236	-78.976	-20.264	-17.735	-6335.60	-10223.00	-5407.40
60	-0.07449	-72.830	-104.78	-59.682	-1343.30	-10123.00	-4115.10
	-0.07146	-45.033	-15.942	-8.9312	-3156.20	-10329.00	-4189.40
75	-0.07369	-45.540	-113.61	-30.582	-758.53	-10190.00	-2086.60
	-0.07233	-42.133	-12.064	-3.5671	-1282.70	-10317.00	-2139.20
90	-0.08359	-41.257	-117.17	0.000	1705.60	-10334.00	0.000
	-0.08507	-47.415	-8.5814	0.000	-723.40	-10518.00	0.000

类似地,忽略层合圆柱壳中拉剪效应按假想无拉剪耦合效应的铺设层合圆柱壳进行计算,可以研究拉剪耦合对任意铺设层合圆柱壳弯曲状态具体影响,并将此结果与按真实的任意铺设层合圆柱壳计算所得相应结果比照,可以反映拉剪耦合效应的影响。计算选取材料 1 的 SS 圆柱壳及 CC 圆柱壳解析进行,结构参数为  $L = 1\text{m}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $h = 0.01\text{m}$ ,  $q = -10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 13-32 和表 13-33 中。表 13-32 和表 13-33 每格中\*位置数值为按任意铺设解计算真实值,\*\*位置数值为忽略拉剪耦合计算所得比拟值。

表 13-32 虑拉剪耦合及忽略拉剪耦合两情况下材料

$1[0/\beta]_T$ CC 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.14299	-213.66	-5.6982	0.00	-1199.10	-5648.60	0.000
15	-0.1482 *	-200.64	-13.148	-27.234	-3011.50	-6644.90	-618.06
	-0.1405 **	-202.87	-11.986	-23.635	-2851.30	-6570.20	-35.465
30	-0.13342	-174.58	-39.710	-59.372	-5907.40	-8208.84	-2917.70
	-0.11133	-183.88	-37.296	-55.925	-5039.90	-7857.20	-29.076
45	-0.09400	-114.39	-75.628	-71.833	-5194.80	-9327.20	-4480.00
	-0.07368	-119.15	-75.791	-71.980	-4326.30	-9230.80	-4114.40
75	-0.06730	-27.735	-111.24	-29.834	-11192.0	-10123.0	-1898.40
	-0.05676	-21.698	-113.74	-29.817	-10950.0	-10423.0	-33.168
90	-0.07840	-19.719	-116.36	0.000	-629.770	-10350.0	0.000

表 13-33 考虑拉剪耦合及忽略拉剪耦合两情况下材料

$1[0/\beta]_T$ SS 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.23563	-289.87	-8.14499	0.00	-2174.70	-9188.40	0.000
15	-0.21417	-277.33	-17.996	-38.954	-3996.70	-9276.20	-2035.50
	-0.20703	-274.11	-17.278	-36.895	-3879.70	-9358.70	-1159.40

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
30	-0.15793	-221.35	-48.893	-74.572	-5842.30	-9517.00	-4602.50
	-0.14268	-228.92	-49.244	-75.219	-5364.30	-9530.40	-1161.50
45	-0.10229	-135.36	-83.406	-79.855	-4184.40	-9870.20	-5359.00
	-0.08502	-140.84	-86.883	-82.832	-3511.10	-10008.00	-6267.60
60	-0.07449	-72.830	-104.78	-59.682	-1343.30	-10123.00	-4115.10
	-0.05785	-69.599	-108.07	-60.736	-1041.90	-10400.00	-2385.60
75	-0.07369	-45.540	-113.61	-30.582	-758.53	-10190.00	-2086.60
	-0.05958	-37.906	-115.34	-30.253	-674.18	-10469.00	-60.906
90	-0.08359	-41.257	-117.17	0.000	1705.60	-10334.00	0.000

对弯扭耦合效应研究可采用与上相似的思路进行,忽略层合圆柱壳中弯扭效应按假想无弯扭耦合效应的铺设层合圆柱壳进行计算,以研究弯扭耦合对任意铺设层合圆柱壳弯曲状态具体影响,并将此结果与按真实的任意铺设层合圆柱壳计算所得相应结果比较,可以反映弯扭耦合效应的影响。计算选取材料 1 的 SS 圆柱壳及 CC 圆柱壳进行,结构参数为  $L=1\text{m}$ ,  $R=1\text{m}$ ,  $h=0.05\text{m}$ ,  $q=-10000\text{N/m}^2$ , 铺设方式为  $[0/\beta]_T$ 。具体结果反映在表 13-34 和表 13-35 中。表 13-34 和表 13-35 中每格中\*位置数值为按任意铺设解计算真实值,\*\*位置数值为忽略弯扭耦合计算所得比拟值。

表 13-34 考虑弯扭耦合及忽略弯扭耦合两情况下材料

1 $[0/\beta]_T$ CC 圆柱壳挠度内力计算结果

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.14299	-213.66	-5.6982	0.00	-1199.10	-5648.60	0.000
15	-0.1482 *	-200.64	-13.148	-27.234	-3011.50	-6644.90	-618.06
	-0.1485 **	-201.28	-13.169	-2.1746	-3011.00	-6639.10	-603.95

(续)

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
30	-0.13342	-174.58	-39.710	-59.372	-5907.40	-8208.84	-2917.70
	-0.13463	-175.42	-39.401	-26.070	-5914.60	-8236.60	-2893.60
45	-0.09400	-114.39	-75.628	-71.833	-5194.80	-9327.20	-4480.00
	-0.09537	-114.68	-73.946	-53.052	-5207.60	-9391.60	-4437.80
75	-0.067303	-27.735	-111.24	-29.834	-11192.00	-10123.00	-1898.40
	-0.067456	-27.688	-108.31	-28.064	-11198.00	-10139.00	-1896.70
90	-0.078399	-19.719	-116.36	0.000	-629.770	-10350.00	0.000

表 13-35 考虑弯扭耦合及忽略弯扭耦合两情况下材料  
 $1[0/\beta]_T$  SS 圆柱壳挠度内力

$\beta/(^{\circ})$	$w \times 10^4$ /m	$M_x(0.5)$ /N	$M_y(0.5)$ /N	$M_{xy}(0.5)$ /N	$N_x(0.5)$ /(N/m)	$N_y(0.5)$ /(N/m)	$N_{xy}(0.5)$ /(N/m)
0	-0.23563	-289.87	-8.14499	0.00	-2174.70	-9188.40	0.000
15	-0.21417	-277.33	-17.996	-38.954	-3996.70	-9276.20	-2035.50
	-0.21722	-279.72	-18.108	-10.202	-4019.40	-9330.90	-2028.00
30	-0.15793	-221.35	-48.893	-74.572	-5842.30	-9517.00	-4602.50
	-0.16295	-223.24	-48.458	-43.642	-5932.40	-9658.30	-4624.90
45	-0.10229	-135.36	-83.406	-79.855	-4184.40	-9870.20	-5359.00
	-0.10559	-134.80	-80.662	-63.700	-4276.30	-10018.00	-5385.40
60	-0.07449	-72.830	-104.78	-59.682	-1343.30	-10123.00	-4115.10
	-0.07578	-71.880	-99.575	-53.983	-1389.10	-10211.00	-4123.70
75	-0.07369	-45.540	-113.61	-30.582	-758.53	-10190.00	-2086.60
	-0.07390	-45.363	-110.12	-28.846	-751.81	-10209.00	-2085.90
90	-0.08359	-41.257	-117.17	0.000	1705.60	-10334.00	0.000

#### 4. 结论

分析表 13-12 ~ 表 13-35, 可以得到以下结论:

(1) 拉剪耦合效应对圆柱壳结构位移、内力有显著影响。圆柱壳

中面内薄膜内力要明显大于弯曲内力,反映面内拉伸与剪切耦合的拉剪耦合效应自然对圆柱壳结构发挥了明显影响力。分析表 13-30 ~ 表 13-35,发现对于考虑剪切变形的 SS 圆柱壳,拉剪耦合效应增大了结构的挠度,这表明对圆柱壳来说,拉剪耦合降低了圆柱壳的刚度。同时由于拉剪耦合效应的存在,轴向薄膜内力  $N_x N_{xy}$  一般大于忽略拉剪耦合计算值,而考虑拉剪耦合的弯矩  $M_x$ 、环向薄膜内力  $N_y$  一般小于忽略拉剪耦合相应。由于拉剪耦合的存在,当  $\beta$  较小时,考虑拉剪耦合的  $M_y$ 、 $M_{xy}$  小于忽略拉剪耦合相应计算值,当  $\beta$  增加到一定值考虑拉剪耦合的  $M_y$ 、 $M_{xy}$  反大于忽略拉剪耦合相应计算值。经比较,拉剪耦合对面内剪力的影响最大。对 CC 圆柱壳结果比较也可得到类似的结论。相对弯扭耦合、拉弯耦合,拉剪耦合效应对结构影响程度最大。

(2) 拉弯耦合效应对圆柱壳挠度、内力的影响仅次于拉剪耦合效应。计算发现即使对于承受横向载荷的圆柱中厚壳,壳体中弯矩、扭矩亦明显小于壳体面内力。对于 SS 圆柱壳,拉弯耦合的存在一般情况下增大了圆柱壳内力矩,而绝大多数情况下降低了薄膜内力  $N_x$ 、 $N_y$ ,薄膜内力  $N_{xy}$  则随  $\beta$  变化有一定涨落。具体来说,当  $\beta$  较小时,考虑拉剪耦合的  $N_{xy}$  大于忽略拉剪耦合相应计算值,当  $\beta$  增加到一定值考虑拉剪耦合的  $N_{xy}$  反小于忽略拉剪耦合相应计算值。除了  $N_x$ ,在拉剪耦合效应的影响下薄膜内力  $N_x$ 、 $N_y$  变化幅度不大。对 CC 圆柱壳,拉弯耦合的存在一般可增大圆柱壳内力矩(在个别情况下如  $\beta = 90^\circ$ ,  $M_x$  却被降低),而绝大多数情况下增大了薄膜内力。比较 CC 圆柱壳中心挠度值,可见拉弯耦合降低了 CC 圆柱壳的刚性。对 SS 圆柱壳来说,情况要复杂一些,当  $\beta$  较小时,考虑拉剪耦合的挠度小于忽略拉剪耦合相应计算值,当  $\beta$  增加到一定值考虑拉剪耦合的挠度值反大于忽略拉剪耦合相应计算值。从中也可看出,由于任意铺设层合壳存在一种或几种耦合效应,壳体横向剪切效应又存在纵向剪切效应,这给层合壳设计带来很大难度。

(3) 弯扭耦合效应对圆柱壳结构位移、内力有一定影响。由于圆柱壳面内弯曲内力矩比薄膜内力小得多,反映圆柱壳弯曲、扭转的弯

扭耦合效应对圆柱壳结构的影响弱一些。分析表 13-30 ~ 表 13-35, 发现对于考虑剪切变形的 SS 圆柱壳, 弯扭耦合效应降低了结构挠度。弯扭耦合效应对结构的弯矩  $M_x$ 、 $M_y$  影响不大, 但显著增大了扭矩。弯扭耦合效应降低了结构的薄膜剪力  $N_{xy}$ , 随  $\theta$  变化, 弯扭耦合使  $N_x$ 、 $N_y$  有所涨落, 但幅度均不大。对 CC 圆柱壳计算结果, 也可得到年度基本类似结论。与拉剪耦合、拉弯耦合相比, 弯扭耦合对圆柱壳影响最小。

(4) 横向剪切效应对中厚复合材料圆柱壳变形有明显的影响。从表 13-25 ~ 表 13-27 可发现不同铺设方式, CC 厚圆柱壳中心挠度 FSDT 值大于 CLT 挠度值, 这对于  $[45^\circ]_T$ 、 $[45^\circ/0]_T$  层合壳更是如此, FSDT 解几乎为 CLT 解的二倍, CLT 明显低估了变形, 横向剪切效应极大地增大了厚圆柱壳变形。但圆柱壳厚度降低到一定值时, FSDT 解反而小于 CLT 解, 而当  $R/h > 50$ , 圆柱壳 FSDT 解与 CLT 解已相当接近, 这表明对薄圆柱壳, 其横向剪切效应影响已比较微弱了, 可以忽略。对 SS 圆柱壳也得到类似结论, 不过 SS 圆柱壳受横向剪切影响程度要小一些。

(5) 横向剪切效应对中厚复合材料圆柱壳薄膜内力、内力矩的影响是明显的。从表 13-25 ~ 表 13-27 可发现不同铺设方式, CC 厚圆柱壳(如  $h = 0.2$  的圆柱壳)中心薄膜内力 FSDT 值明显大于 CLT 薄膜内力值, FSDT 解约为 CLT 解的数倍, CLT 明显低估了内力变形, 考虑到厚圆柱壳薄膜内力值要大于内力矩值, 即使 CLT 高估了内力矩, 应用 CLT 评价厚圆柱壳强度所得结论是危险的, 可见在厚圆柱壳强度计算中应考虑横向剪切变形。圆柱壳厚度降低到一定值后, FSDT 内力值与 CLT 内力值逐渐接近。对于采用不同铺设方式圆柱壳这一厚度值不一样, 一般对于  $R/h < 20$  的 CC 圆柱壳就应该采用 FSDT 计算圆柱壳内力、内力矩值。而对于 SS 圆柱壳分析亦可得到类似结论, 不过 SS 圆柱壳受横向剪切效应影响程度要低于 CC 圆柱壳, 一般  $R/h$  为 10 的 SS 层合圆柱壳中心内力内力矩 FSDT 值与 CLT 值相差不是很大。

(6) 铺设方式对复合材料圆柱壳的影响是明显的。采用不同铺设方式的圆柱壳力学状态相差较大。对于同一厚度的圆柱壳,铺层方式不同但铺层数相近的圆柱壳,其挠度内力可相差 10% 以上。根据实际情况综合选择铺层方式对复合材料圆柱壳设计是非常重要的。

(7) 从本章表 13-12 ~ 表 13-30 发现铺设角  $\beta$  对任意铺设层合圆柱壳挠度、内力弯矩有重大影响:对于本章所选择各种铺设方式 SS 圆柱壳、CC 圆柱壳, $\beta$  从  $0^\circ$  增大到  $90^\circ$ ,相应圆柱壳中心挠度逐渐减小,并在  $90^\circ$  达到最小值。对于本章所选择各种铺设方式考虑横向剪切效应的 SS 圆柱壳、CC 圆柱壳的环向薄膜内力则随  $\beta$  变化改变也不小,这与薄圆柱壳明显不同,随着  $\beta$  的增加环向薄膜内力绝对值也在增加,并在  $90^\circ$  达到最大值。圆柱壳薄膜剪力最大值发生在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度,最小值发生在  $0^\circ$ 、 $90^\circ$  情况下,而轴向薄膜内力情况则随边界条件不同有差异。考虑横向剪切变形的圆柱壳,内力矩虽然仍小于薄膜内力,但已不像薄圆柱壳那样显著。 $0^\circ$  圆柱壳内轴向弯矩、环向弯矩最大, $\beta$  为  $90^\circ$  的圆柱壳内轴向弯矩最小。 $\beta$  在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间某一角度的圆柱壳扭矩最大值。

(8) 铺设层数  $N$  增大对层合圆柱壳刚度内力影响是明显的,比对薄圆柱壳影响程度要大。对本书选择承受均布载的角铺设铺设层合圆柱壳,在相同铺设方式及其他参数相同情况, $N$  增大,圆柱壳中心挠度一般降低,薄膜内力一般降低,内力矩虽有所涨落,但由于内力矩小于薄膜内力,影响不太突出。与层合板类似,增大层数对提高层合圆柱壳刚度强度是有利的,这与承受均布载荷的层合板是一致的。

(9) 层合圆柱壳边界条件、载荷及材料各向异性程度对任意铺设层合圆柱壳刚度、内力分布变化规律影响是明显的。对本章表 13-12 ~ 表 13-26 进行总体分析可发现:具有不同边界的层合圆柱壳随各设计参数受耦合相应影响的程度趋势是有差异的,需要根据实际边界具体计算分析。这也是与层合板情况类似的。

## 13.5 基于一阶剪切理论的任意铺设复合材料 圆柱壳屈曲和振动问题解析

### 1. 控制方程

基于一阶剪切理论的任意铺设复合材料薄圆柱壳( $L \times R$ )屈曲和振动问题控制方程为:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}\Phi_x + L_{14}\Phi_y + L_{15}w &= 0 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}\Phi_x + L_{24}\Phi_y + L_{25}w &= 0 \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}\Phi_x + L_{34}\Phi_y + L_{35}w &= 0 \\ L_{41}u + L_{42}v + L_{43}\Phi_x + L_{44}\Phi_y + L_{45}w &= 0 \\ L_{51}u + L_{52}v + L_{53}\Phi_x + L_{54}\Phi_y + L_{55}w &= 0 \quad (13-20) \end{aligned}$$

$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$  为圆柱壳中面单位长度上  $x$ 、环向  $\theta$  方向压力载荷、剪力载荷,  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。对于屈曲问题, 方程 (13-20) 中要舍去  $\omega$ 。对于振动问题, 方程 (13-20) 要舍去  $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ 。

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + A_{66} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{12} &= L_{21} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + A_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{13} &= L_{31} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + B_{66} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{14} &= L_{41} = L_{23} = L_{32} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + B_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + A_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ L_{24} &= L_{42} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + B_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + D_{66} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - A_{55} \\
L_{43} &= L_{34} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + D_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - A_{45} \\
L_{44} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + D_{22} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - A_{44} \\
L_{15} &= -L_{51} = \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L_{25} &= -L_{52} = \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L_{35} &= -L_{53} = \left( \frac{B_{12}}{R} - A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{26}}{R} - A_{45} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L_{45} &= -L_{54} = \left( \frac{B_{26}}{R} - A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{22}}{R} - A_{44} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L_{55} &= A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + A_{44} \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{A_{22}}{R^2} + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial}{\partial x} + N_{xy} \frac{1}{R} \frac{\partial}{R \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( N_y \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + N_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \right) + N_x \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \\
&\quad \frac{2N_{xy}}{R} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{N_y}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \rho \omega^2
\end{aligned}$$

式中:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^m(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$H_k = h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{h_k^5 - h_{k-1}^5}{h^4}$$

$$A = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{44}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k$$

$$B = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{55}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k$$

$$C = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{45}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k$$

$$[\Delta Q]^2 = Q_{44}^{(k)} Q_{55}^{(k)} - [Q_{45}^{(k)}]^2 A_{44} = A / (AB - C^2)$$

$$A_{45} = B / (AB - C^2)$$

$$A_{55} = C / (AB - C^2)$$

## 2. 求解过程

### 齐次解和补充解

设方程(13-20)有如下齐次解:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(\xi) e^{in\theta}$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n(\xi) e^{in\theta}$$

$$\Phi_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{xn}(\xi) e^{in\theta} \quad (13-21)$$

$$\Phi_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{xn}(\xi) e^{in\theta}$$

$$w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(\xi) e^{in\theta}$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

设

$$f_n(\xi) = Q e^{ins\xi}$$

$$g_n(\xi) = O e^{ins\xi}$$

$$g_{xn}(\xi) = OX e^{ins\xi} \quad (13-22)$$

$$h_n(\xi) = P e^{ins\xi}$$

$$h_{nx}(\xi) = PX e^{ins\xi}$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P, OX, PX$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

将式(13-21)和式(13-22)代入方程(13-20), 根据系数行列式值为 0 条件, 可得特征方程:

$$S_{100}s^{10} + S_{91}s^9 + S_{82}s^8 + S_{73}s^7 + S_{64}s^6 + S_{55}s^5 + \\ S_{46}s^4 + S_{37}s^3 + S_{28}s^2 + S_{19}s + S_{010} = 0 \quad (13-23)$$

式中: 特征根  $s_k, s_{k+1}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9$ ) 是  $n$  的函数。 $S_{100}, \dots, S_{010}$  形式复杂, 具体形式略。

方程 (13-23) 特征根  $s_k, s_{k+1}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9$ ) 随着  $n$  和载荷 ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) 或  $\omega$  变化, 可能是共轭复数根 ( $s_k = a_k + ib_k, s_{k+1} = a_k - ib_k$ ) 或成对的实数根 ( $s_k = a_k, s_{k+1} = a_{k+1}$ )。

这样,  $w, u, v, \Phi_x, \Phi_y$  齐次解可以表示如下实数级数:

$$(U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{1kn}, P_{1kn}, OX_{1kn}, PX_{1kn}, Q_{1kn}) \\ \psi_1(\xi, \theta, s_k, s_{k+1}, n) + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{2kn}, P_{2kn}, OX_{2kn}, PX_{2kn}, Q_{2kn}) \\ \psi_2(\xi, \theta, s_k, s_{k+1}, n) + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{3kn}, P_{3kn}, OX_{3kn}, PX_{3kn}, Q_{3kn}) \\ \psi_3(\xi, \theta, s_k, s_{k+1}, n) + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{4kn}, P_{4kn}, OX_{4kn}, PX_{4kn}, Q_{4kn}) \\ \psi_4(\xi, \theta, s_k, s_{k+1}, n) \quad (13-24)$$

式中: ( $O_{jkn}, P_{jkn}, OX_{jkn}, PX_{jkn}, Q_{jkn}, j = 1, 2, 3, 4; k = 1, 3, 5, 7, 9$ ) 为任意常数。

将式 (13-24) 代入方程 (13-20) 任意 4 式, 可以得到系数关系矩阵:

$$\begin{bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix} \quad (13-25)$$

$$\begin{bmatrix} OX_{1kn} \\ OX_{2kn} \\ OX_{3kn} \\ OX_{4kn} \\ PX_{1kn} \\ PX_{2kn} \\ PX_{3kn} \\ PX_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX_{11k} & -TX_{21k} & TX_{13k} & -TX_{23k} \\ TX_{21k} & -TX_{11k} & TX_{23k} & -TX_{13k} \\ TX_{31k} & -TX_{41k} & TX_{33k} & -TX_{43k} \\ TX_{41k} & -TX_{31k} & TX_{43k} & -TX_{33k} \\ SX_{11k} & -SX_{21k} & SX_{13k} & -SX_{23k} \\ SX_{21k} & -SX_{11k} & SX_{23k} & -SX_{13k} \\ SX_{31k} & -SX_{41k} & SX_{33k} & -SX_{43k} \\ SX_{41k} & -SX_{31k} & SX_{43k} & -SX_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix}$$

(13-26)

补充解  
设

$$\begin{aligned} u(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\ v(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ \Phi_x(\xi) &= x o_x e^{h\xi} \\ \Phi_y(\xi) &= x p_x e^{h\xi} \\ w(\xi) &= q_x e^{h\xi} \end{aligned} \quad (13-27)$$

式中:  $o_x$ ,  $p_x$ ,  $q_x$ ,  $xp_x$  和  $xq_x$  为待定实数常数,  $h$  为特征根。

将式(13-27)代入方程(13-20)可得 10 次代数方程:

$$h^4(SS_{100}h^6 + SS_{80}h^4 + SS_{60}h^2 + SS_{40}) = 0 \quad (13-28)$$

$$SS_{100}h^6 + SS_{80}h^4 + SS_{60}h^2 + SS_{40} = 0 \quad (13-29)$$

式中:  $SS_{100}, \dots, SS_{010}$  形式复杂, 具体形式略。

这样补充解可为下式:

$$U^{**} = t_2 + t_3(\xi - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{xk}, o_{xk+1}) \quad (13-30)$$

$$V^{**} = t_4 + t_5(\xi - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{xk}, p_{xk+1}) \quad (13-31)$$

$$\Phi_x^{**} = t_6 + t_7(\xi - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xo_{xk}, xo_{xk+1}) \quad (13-32)$$

$$\Phi_y^{**} = t_8 + t_9(\xi - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xp_{xk}, xp_{xk+1}) \quad (13-33)$$

$$W^{**} = t_1 + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{xk}, q_{xk+1}) \quad (13-34)$$

式中:  $(g_{yk}, g_{y_{k+1}}, q_{xk}, q_{x_{k+1}}, k = 1, 3, 5)$  为待定常数。 $h_k, h_{k+1} (k = 1, 3, 5)$  是式(13-29)的根。

将式(13-30) ~ 式(13-34)多项式部分代入方程(13-20), 可得  $t_k (k = 1, 2, \dots, 13)$  之间 5 个关系式。

将式(13-30) ~ 式(13-34)中  $\Gamma$  函数部分代入方程(13-20)任意 4 式, 可得有关系数关系矩阵。 $o_{xk}, o_{x_{k+1}}, p_{xk}, p_{x_{k+1}}, xo_{xk}, xo_{x_{k+1}}, xp_{xk}, xp_{x_{k+1}}$  可从  $q_{xk}, q_{x_{k+1}} (k = 1, 3, 5)$  推导得来。

$T$  补充解(13-30) ~ 式(13-34)只有 10 个独立待定常数。

### 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合起来, 可得到以  $\xi, \theta$  形式表示的一般解析解:

$$w = W^* + W^{**}$$

$$u = U^* + U^{**}$$

$$v = V^* + V^{**}$$

$$\Phi_x = \Phi_x^* + \Phi_x^{**}$$

$$\Phi_y = \Phi_y^* + \Phi_y^{**} \quad (13-35)$$

### 求解方法

实际计算中,设  $n$  最大取  $M$ ,解析解(13-35)共有  $20M+10$  个未知数  $G_{jkm}$  ( $j=1,2,3,4, k=1,3,5,7,9$ ),  $t_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) 和  $q_{x1}, q_{x2}, q_{x3}, q_{x4}, q_{x5}, q_{x6}$ 。对于基于一阶剪切理论的一般铺设圆柱壳屈曲、振动问题,共有 10 个独立的边界条件。将解析解代入 10 个边界条件中,形成 10 个方程,将所得每个方程展成  $2M+1$  项傅立叶级数,这样根据傅立叶级数正交性,可得  $M$  个  $20 \times 20$  个线性代数方程和 1 个  $10 \times 10$  个线性代数方程,满足各个线性代数方程对应行列式值为 0 的  $\omega$  或  $(N_x, N_y, N_{xy})$  即为所求频率或屈曲载荷。对于屈曲问题,要注意求得载荷最小值。

## 第 14 章 任意铺设复合材料 斜形薄板静力响应解析

任意铺设层合板的各向异性、呈层性将引起拉弯之间、拉剪之间和弯扭之间一系列耦合效应,而斜形板几何形状更带来了边界条件满足的困难。任意铺设层合斜形板力学分析更为复杂。从解析求解来看,任意铺设层合斜板控制方程为偏微分方程组,未知函数为 3 个。在数学上引入复数级数方法后,原来求解相对困难的问题,可以用标准的复级数方法建立任意铺设复合材料矩形薄板静力响应的一般解析解,在进行数值计算也验证了所得到弯曲一般解析解的收敛性和稳定性以后,研究了任意铺设层合板的铺层对称性,同时结合四边简支固定边界、四边固支固定边界进行分析计算。

### 14.1 斜坐标系下的控制方程

考虑复合材料斜形板,板长为  $a$ ,板宽为  $b$ ,厚度为  $h$ ,斜角为  $\beta$ 。板在四边边界简支,板面承受均布载荷  $q$ ,见图 14-1。

$$x = a\xi + b\eta\cos\beta; y = \eta b\sin\beta$$

#### 1. 斜交坐标系( $\xi O \eta$ )变换

本书引入斜交坐标系( $\xi O \eta$ )及无量纲量

$$x = a\xi + b\eta\cos\beta; y = \eta b\sin\beta$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{\cot\beta}{a} & \frac{1}{b\sin\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (14-1)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{\cot^2 \beta}{a^2} & \frac{1}{b^2 \sin^2 \beta} & -\frac{2 \cot \beta}{ab \sin \beta} \\ -\frac{\cot \beta}{a^2} & 0 & \frac{1}{ab \sin \beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (14-2)$$

引入上述变换关系式可将  $xOy$  坐标系下的力学控制方程转换为斜坐标下  $\xi - \eta$  的方程组。

弯曲问题的位移型方程矩形板有以下基本关系式：

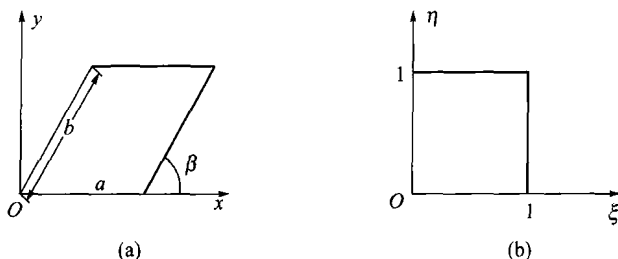


图 14-1 斜坐标系示意图

(1) 几何关系, 物理关系见本书第 10 章的式(10-1)和式(10-2);

(2) 平衡方程, 见本书第 10 章的式(10-3)。

引入以下无量纲量：

$$W = \frac{w}{a}$$

$$U = \frac{u}{a}$$

$$V = \frac{v}{a}$$

$$P = qa^2$$

结合式(14-1)和式(14-2), 这样式(10-3)可改写如下

$$L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W = 0$$



$$L_{12}U + L_{22}V + L_{23}W = 0$$

$$L_{13}U + L_{23}V + L_{33}W = P \quad (14 - 3)$$

式中:

$$LL_{11} = (A_{11} - 2A_{16}\cot\beta + A_{66}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2A_{16} - 2A_{66}\cot\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{12} = (A_{16} - (A_{12} + A_{66})\cot\beta + A_{26}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} +$$

$$\left( \frac{(A_{12} + A_{66}) - 2A_{26}\cot\beta}{\sin\beta} \right) \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{22} = (A_{66} - 2A_{26}\cot\beta + A_{22}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2A_{26} - 2A_{22}\cot\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{13} = - \left( (B_{11} - 3B_{16}\cot\beta + (B_{12} + 2B_{66})\cot^2\beta - B_{26}\cot^3\beta) \frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \right.$$

$$(3B_{16} - 2(B_{12} + 2B_{66})\cot\beta + 3B_{26}\cot^2\beta) \alpha \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} +$$

$$\left( \frac{(B_{12} + 2B_{66}) - 3B_{26}\cot\beta}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial\eta^2\partial\xi} + \frac{B_{26}}{\sin^3\beta} \alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial\eta^3} \right) \frac{1}{a}$$

$$LL_{23} = - \left( (B_{16} - 3B_{26}\cot\beta + (B_{12} + 2B_{66})\cot^2\beta - B_{22}\cot^3\beta) \frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \right.$$

$$\frac{(3B_{26}\alpha - 2(B_{12} + 2B_{66})\cot\beta + 3B_{22}\cot^2\beta)}{\sin\beta} \frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} +$$

$$\left( \frac{(B_{12} + 2B_{66}) - 3B_{22}\cot\beta}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial\eta^2\partial\xi} + \frac{B_{22}}{\sin^3\beta} \alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial\eta^3} \right) \frac{1}{a}$$

$$LL_{33} = \frac{1}{a^2} \left( (D_{11} - 4D_{16}\cot\beta + 2(D_{12} + 2D_{66})\cot^2\beta + 4D_{26}\cot^3\beta + D_{22}\cot^4\beta) \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{(4D_{16} - 4(D_{12} + 2D_{66})\cot\beta + 12D_{26}\cot^2\beta - 4D_{22}\cot^3\beta)}{\sin\beta} \\ & \alpha \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \frac{(2(D_{12} + 2D_{66}) - 12D_{26}\cot\beta + 6D_{22}\cot^2\beta)}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \\ & \frac{(4D_{26} - 4D_{22}\cot\beta)}{\sin^3\beta} \alpha^3 \frac{\partial^4}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \frac{D_{22}}{\sin^4\beta} \alpha^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \Big) \\ & \alpha = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

任意铺设复合材料斜形薄板横向弯曲问题求解可归结为求解偏微分方程组式(14-3)在横向弯曲矩形板边界条件下边值问题。

## 14.2 任意铺设复合材料斜形薄板静力 弯曲一般解析解的建立

本书一般解析解由通解、补充解和特解组成。采取与本书第10章同样的求解过程。

### 1. 通解的推导

本书采用位移法求解,设

$$\begin{aligned} U &= \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{i\sigma\sigma\xi} e^{i\sigma\sigma\eta r} \\ V &= \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{i\sigma\sigma\xi} e^{i\sigma\sigma\eta r} \\ W &= \sum_{-\infty}^{\infty} G e^{i\sigma\sigma\xi} e^{i\sigma\sigma\eta r} \end{aligned} \quad (14-4)$$

式中:  $i$ ——虚数单位;

$m$ ——整数;

$r$ ——特征根。

将式(14-4)代入式(14-3),当  $m$  不为 0 时,可推得有关  $r$  的 8 次特征代数方程

$$S_{80} + S_{71}r + S_{62}r^2 + S_{53}r^3 + S_{44}r^4 + S_{35}r^5 + S_{26}r^6 + S_{17}r^7 + S_{08}r^8 = 0 \quad (14-5)$$

式中:  $S_{kl}$ 形式复杂,具体形式略。

对于一般铺设的复合材料板,式(14-5)有四对共轭复根  $a_k \pm b_k i$  ( $k=1,2,3,4$ )。

采用本书第3章类似的步骤,可以推得的实数形式级数通解  $U$ 、 $V$ 、 $W$  合写如下:

$$\begin{aligned} (U, V, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{1km}, F_{1km}, G_{1km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{2km}, F_{2km}, G_{2km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{3km}, F_{3km}, G_{3km}) \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (E_{4km}, F_{4km}, G_{4km}) \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \end{aligned} \quad (14-6)$$

从基本解的独立性出发,可得到  $E_{ijm}$   $F_{ijm}$   $G_{ijm}$  ( $i, j=1,2,3,4$ ) 之间的关系式。为简便起,将  $U$ 、 $V$ 、 $W$  代入式(14-3)任两式,根据基本解独立性,这样可得8组线性方程,用计算程序可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{Bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{Bmatrix} \quad (14-7)$$

对于规则非对称正交铺设层合板、规则反对称层合板,上面关系矩阵不成立,解形式发生变化,可另外给出相应解。

本书又设

$$\begin{cases} U = \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\omega\eta} \\ V = \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\omega\eta} \\ W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\omega\eta} \end{cases} \quad (14-8)$$

与上面介绍类似,可得有关  $s$  的特征方程式(14-9)、四对不等共轭虚根  $c_k \pm d_k i (k=1, 2, 3, 4)$  和关系矩阵:

$$S_{80}s^8 + S_{71}s^7 + S_{62}s^6 + S_{53}s^5 + S_{44}s^4 + S_{35}s^3 + S_{26}s^2 + S_{17}s + S_{08} = 0 \quad (14-9)$$

$$\begin{Bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{Bmatrix} \quad (14-10)$$

同样可得对应的实数形式级数通解  $U^*$ 、 $V^*$ 、 $W^*$  合写如下:

$$\begin{aligned} (U^*, V^*, W^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{1kn}, P_{1kn}, Q_{1kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{2kn}, P_{2kn}, Q_{2kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{3kn}, P_{3kn}, Q_{3kn}) \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (O_{4kn}, P_{4kn}, Q_{4kn}) \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k}$$

(14 - 11)

从线性偏微分方程解得可迭加性出发,在式(14 - 6)和式(14 - 11)基础上补充多项式及特解,可得一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + a_{13} +$$

$$t_{14}(\xi - 0.5) + t_{15}(\eta - 0.5) + t_{16}(\xi - 0.5)^2 + t_{17}(\eta - 0.5)^2 +$$

$$t_{18}(\xi - 0.5)(\eta - 0.5) + W^{**}$$

(14 - 12)

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \left. \right) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \left. \right) -$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& t_1 + t_2 (\xi - 0.5) + t_3 (\eta - 0.5) + t_4 (\xi - 0.5)^2 + \\
& t_5 (\eta - 0.5)^2 + t_6 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + U^{**} \quad (14 - 13)
\end{aligned}$$

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right.
\end{aligned}$$

$$S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + t_7 + t_8 (\xi - 0.5) + \\ t_9 (\eta - 0.5) + t_{10} (\xi - 0.5)^2 + t_{11} (\eta - 0.5)^2 + \\ t_{12} (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + V^{**} \quad (14-14)$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于线性偏微分方程组, 由于其结构复杂性, 即使特解也较难寻求。对于横向弯曲问题, 本书引入势函数  $\Phi$ , 引进微分算子  $D_0$ , 它是以算子  $LL_{ij}$  组成得  $3 \times 3$  行列式, 并令  $D_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) 表示给该行列式的代数余子式。使

$$U = D_{31} \Phi \quad V = D_{32} \Phi \quad W = D_{33} \Phi \quad (14-15)$$

具体写为

$$\begin{cases} U = u_1 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} + u_2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta} + u_3 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} + u_4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} + u_5 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^4} + u_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} \\ V = v_1 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} + v_2 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta} + v_3 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} + v_4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} + v_5 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^4} + v_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} \\ W = w_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + w_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta} + w_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + w_4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^3} + w_5 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} \end{cases} \quad (14-16)$$

上面  $u_k, v_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ );  $w_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 具体形式略。

依照线性代数理论, 基本微分方程可以写成

$$D_0 \Phi = P \quad (14-17)$$

展开为

$$SS_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta} + SS_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} + SS_{53} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^3} + SS_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} + \\ SS_{35} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^6} + SS_{17} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} = P \quad (14-18)$$



对于均布载荷,本书选取

$$\Phi = \frac{P}{81216} \left( \frac{(\xi - 0.5)^8}{SS_{80}} + \frac{(\xi - 0.5)^4(\eta - 0.5)^4}{SS_{44}} + \frac{(\eta - 0.5)^8}{SS_{08}} \right) \quad (14-19)$$

这样特解可由式(14-19)求得。

### 3. 求解模式

在实际计算中,不可能取无穷大,设最大取  $M$ , 这样一般解析解式(14-12)、式(14-13)和式(14-14)共有  $16M + 18$  个未知数。对于任意铺设矩形板,每边有四个边界条件,共有 16 个边界条件。将一般解析解代入 16 个边界条件中,形成 16 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项余弦级数。根据余弦级数的正交性,可以得到  $16M + 16$  个线性代数方程。一般解析解代入式(14-3),可得有关补充项的两个方程,这样共建立  $16M + 18$  个方程,可以求解  $16M + 18$  个未知数,至此横向弯曲问题得解。

## 14.3 弯曲一般解析解的数值计算

选取任意铺设的四边简支(SSSS)和四边固支(CCCC)层合斜板进行计算,以考核解的收敛性和稳定性。

材料参数为

$$E_1 = 40\text{GPa}, E_2 = 1\text{GPa}, G_{12} = 0.6\text{GPa}$$

$$G_{12} = G_{13}, G_{23} = 0.5G_{12}, \gamma_{12} = 0.25$$

对于 CCCC 板,边界条件为

$$W(0, \eta) = 0, W(1, \eta) = 0, W(\xi, 0) = 0, W(\xi, 1) = 0$$

$$U(0, \eta) = 0, U(1, \eta) = 0, U(\xi, 0) = 0, U(\xi, 1) = 0$$

$$V(0, \eta) = 0, V(1, \eta) = 0, V(\xi, 0) = 0, V(\xi, 1) = 0$$

$$\frac{\partial W(0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial W(1, \eta)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial W(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial W(\xi, 1)}{\partial \eta} = 0$$

对于 SSSS 板,边界条件为

$$W(0,\eta) = 0, \quad W(1,\eta) = 0, \quad W(\xi,0) = 0, \quad W(\xi,1) = 0$$

$$U(0,\eta) = 0, \quad U(1,\eta) = 0, \quad U(\xi,0) = 0, \quad U(\xi,1) = 0$$

$$V(0,\eta) = 0, \quad V(1,\eta) = 0, \quad V(\xi,0) = 0, \quad V(\xi,1) = 0$$

$$M_x(0,\xi) = 0, \quad M_x(1,\xi) = 0, \quad M_y(\xi,0) = 0, \quad M_y(\xi,1) = 0$$

### 1. 收敛性算例

对于 SSSS、CCCC 斜板,板参数为  $b/a = 1.0, h/a = 0.01, b = 1\text{m}, \beta = 45^\circ$ 。承受均布载荷  $p$ , 三层层合板铺设方式为  $[-89.9^\circ/11.1^\circ/14.5^\circ]$ 。表 14-1 显示中心挠度随级数项数增大保持稳定。

表 14-1 板中心挠度  $\bar{W} = 10^3 WE_2 h^3 / pa^4$  收敛性验证 1

$\bar{W}$	$M = 10$	$M = 20$	$M = 30$	$M = 44$	$M = 48$
SSSS	1.978	1.979	1.980	1.980	1.980
CCCC	1.103	1.103	1.103	1.103	1.103

### 2. 解可靠性验证计算

选取承受均布载荷  $q$  的 SSSS 板进行计算。层合板铺设方式为  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta - \Delta\theta]$ , 斜角为  $\beta$ 。通过改变  $\Delta\theta$  ( $\Delta\theta = 10^\circ, 1^\circ, 0.5^\circ, 0.1^\circ$ ) 和  $\beta$  进行挠度计算, 结果显示在表 14-2 中参考解是由 Noor 和 Mathers<sup>[8]</sup> 给出的。表 14-2 显示当  $\Delta\theta$  逐渐减小时, 本章解逼近已知结果, 这从另一个方面验证了本章解的准确性。

表 14-2 板中心挠度  $\bar{W} = 1000wE_2 h^3 / qa^4$

			$\bar{W}$
$\beta = 80^\circ$ $\beta = 89^\circ$ $\beta = 89.5^\circ$ $\beta = 90^\circ$	本节解	$M = 40$	
	$a/h = 0.01$	$\Delta\theta = 10^\circ$	2.3910
		$\Delta\theta = 1^\circ$	2.4543
		$\Delta\theta = 0.5^\circ$	2.4526
	参考解	$\Delta\theta = 0$	2.4079
$\beta = 80^\circ$   $\beta = 80^\circ$	本节解	$\Delta\theta = 1^\circ$	2.4386
	$a/h = 0.01$	$\Delta\theta = 0.5^\circ$	2.4404
		$\Delta\theta = 0.1^\circ$	2.4418
	本书第 3 章解	$\Delta\theta = 0$	2.4425

### 3. 板结构力学特性计算分析

层合板结构的力学响应受 2 类参数影响,1 类是板内部几何参数,诸如纤维铺设角、板斜角、纵横尺寸比、板厚度,另一类是板载荷和边界条件。按上文的方法对  $[\theta/90^\circ - \theta]_N$  铺设的 SSSS、CCCC 两类层合板进行计算分析,计算中固定板厚度而改变铺设层数、铺设角度、纵宽比,板最上 1 层铺设角为  $+\theta$ 。铺设材料参数为

$$E_1 = 181\text{GPa}, E_2 = 10.3\text{GPa}, G_{12} = 7.17\text{GPa}, \gamma_{12} = 0.28$$

计算结果表示在图 14-2 ~ 图 14-4。

通过对计算结果分析可得如下结论:

(1) 边界条件对板力学相应有重大影响。如预期一样,在同样外部、内部参数下 SSSS 斜板挠度要大于 CCCC 斜板对应值。对于不同边界条件,板挠度受内部参数影响程度不同。

(2) 当铺设层数从 2 增加到 24 后,斜板挠度在减少。当  $2N > 6$  时,如图 14-3 所示减少幅度在降低。

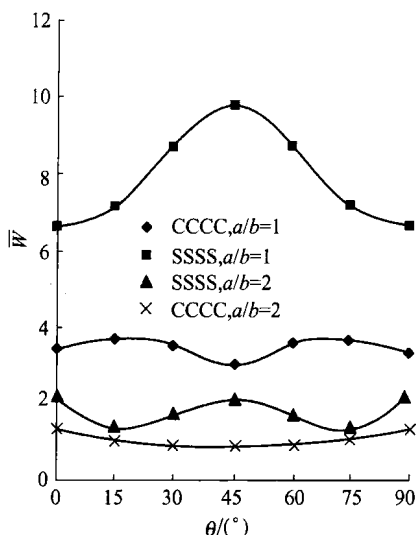


图 14-2 层合斜板中心无量纲挠度

$$\bar{W} = wE_2h^3 \times 1000 / pa^3 b \sin\beta \text{ 与铺设角 } \theta \text{ 的变化趋势}$$

(斜板铺设方式为  $[\theta/90^\circ - \theta]$ , 板参数  $b = 1\text{m}$ ,  $h/b = 0.01$ ,  $\beta = 60^\circ$ )

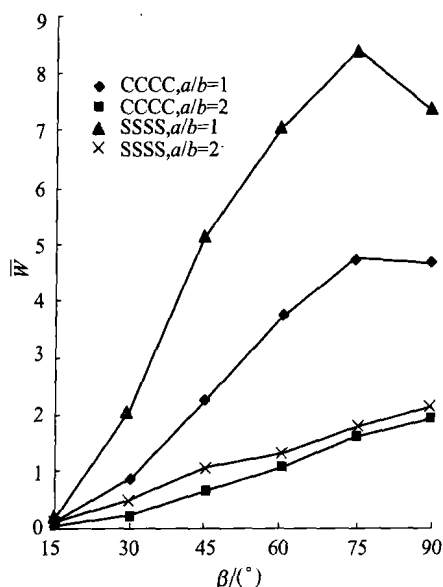


图 14-3 层合斜板中心无量纲挠度

$\bar{W} = wE_2 h^3 \times 1000 / pa^3 b \sin \beta$  与斜角  $\beta$  的变化趋势  
(层合斜板铺设方式为  $[\theta/90^{\circ} - \theta]$ , 板参数  $b = 1\text{m}$ ,  $h/b = 0.01$ ,  $\theta = 15^{\circ}$ )

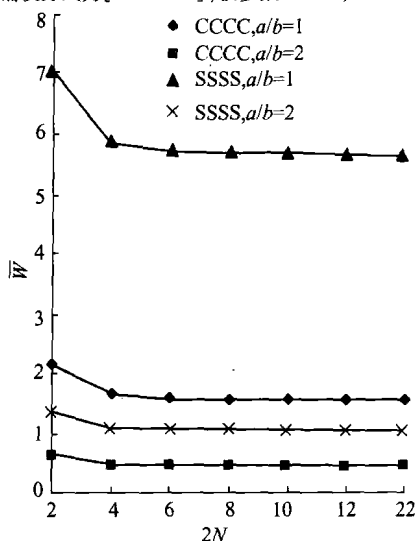


图 14-4 石墨环氧层合斜板中心无量纲挠度  $\bar{W} = wE_2 h^3 \times 1000 / pa^3 b \sin \beta$  与铺层层数  $2N$  的变化趋势(层合斜板铺设方式为  $[\theta/90^{\circ} - \theta]_N$ , 板参数  $b = 1\text{m}$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $\theta = 30^{\circ}$ ,  $\beta = 45^{\circ}$ )

(3) 对于所研究的层合板,板挠度随铺设角影响规律有差别。有的情况下,铺设角 $+\theta$ 从 $0^\circ \sim 45^\circ$ 过程中,板挠度在增大,有时规律则相反,要针对不同情况计算后才能确定。

(4) 不同纵宽比板,其挠度随铺设角和铺设层数影响趋势是不同的。

(5) 板斜角对斜形板设计有重要影响。如图 14-2 所示,斜角对板挠度影响很大,在实际设计中应该认真分析计算。

## 14.4 基于经典理论的一般铺设复合材料 斜形板振动问题解析

基于经典理论的一般角铺设复合材料斜形板振动问题控制方程合写为下式:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0 \quad (14-20(a))$$

$$L_{12}u + L_{22}v + L_{23}w = 0 \quad (14-20(b))$$

$$L_{13}u + L_{23}v + L_{33}w = 0 \quad (14-20(c))$$

$$\text{式中: } L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{13} = - \left( B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right)$$

$$L_{23} = - \left( B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right)$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \rho \omega^2$$

式中:  $\omega$  为振动频率,  $\rho$  为板单位面积密度。

采用斜坐标变换, 将方程(14-20)转换到斜坐标系下:

$$LL_{11}U + LL_{12}V + LL_{13}W = 0 \quad (14-21(a))$$

$$LL_{12}U + LL_{22}V + LL_{23}W = 0 \quad (14-21(b))$$

$$LL_{13}U + LL_{23}V + LL_{33}W = 0 \quad (14-21(c))$$

式中:

$$LL_{11} = (A_{11} - 2A_{16}\tan\beta + A_{66}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(2A_{16} - 2A_{66}\tan\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{12} = (A_{16} - (A_{12} + A_{66})\tan\beta + A_{26}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{((A_{12} + A_{66}) - 2A_{26}\tan\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{22} = (A_{66} - 2A_{26}\tan\beta + A_{22}\tan^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(2A_{26} - 2A_{22}\tan\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$LL_{13} = -((B_{11} - 3B_{16}\tan\beta + (B_{12} + 2B_{66})\tan^2\beta - B_{26}\tan^3\beta) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} +$$

$$(3B_{16} - 2(B_{12} + 2B_{66})\tan\beta + 3B_{26}\tan^2\beta) \alpha \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} +$$

$$\left( \frac{(B_{12} + 2B_{66}) - 3B_{26}\tan\beta}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta^2 \partial \xi} + \frac{B_{26}}{\sin^3\beta} \alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) \frac{1}{a}$$

$$LL_{23} = -((B_{16} - 3B_{26}\tan\beta + (B_{12} + 2B_{66})\tan^2\beta - B_{22}\tan^3\beta) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} +$$

$$\alpha \frac{(3B_{26} - 2(B_{12} + 2B_{66})\tan\beta + 3B_{22}\tan^2\beta)}{\sin\beta} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{((B_{12} + 2B_{66}) - 3B_{22}\tan\beta)}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial\eta^2\partial\xi} + \frac{B_{22}}{\sin^3\beta} \alpha^3 \frac{\partial^3}{\partial\eta^3} \frac{1}{a} \\
LL_{33} = & \frac{1}{a^2} \left( (D_{11} - 4D_{16}\tan\beta + 2(D_{12} + 2D_{66})\tan^2\beta + 4D_{26}\tan^3\beta + D_{22}\tan^4\beta) \right. \\
& \frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + \frac{(4D_{16} - 4(D_{12} + 2D_{66})\tan\beta + 12D_{26}\tan^2\beta - 4D_{22}\tan^3\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\eta} + \\
& \frac{(2(D_{12} + 2D_{66}) - 12D_{26}\tan\beta + 6D_{22}\tan^2\beta)}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial\xi^2} + \\
& \left. \frac{(4D_{26} - 4D_{22}\tan\beta)}{\sin^3\beta} \alpha^3 \frac{\partial^4}{\partial\eta^3\partial\xi} + \frac{D_{22}}{\sin^4\beta} \alpha^4 \frac{\partial^4}{\partial\eta^4} \right) - \rho\omega^2 a^2 \quad (14-22)
\end{aligned}$$

式中:  $\partial = a/b$ 。

### 1. 齐次解

设方程(14-21)有如下齐次解:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \\
U &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\eta) e^{im\pi\xi} \\
V &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(\eta) e^{im\pi\xi}
\end{aligned} \quad (14-23)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$\begin{aligned}
f_m(\eta) &= iGe^{im\pi\eta r} \\
g_m(\eta) &= Ee^{im\pi\eta r} \\
h_m(\eta) &= Fe^{im\pi\eta r}
\end{aligned} \quad (14-24)$$

式中:  $m$  为非0整数,  $G, E$  和  $F$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

将式(14-23)和式(14-24)代入方程(14-21), 根据系数行列式值为0的条件, 可得8阶代数方程 $l$ :

$$\begin{aligned}
S_{80} + S_{71}r + S_{62}r^2 + S_{53}r^3 + S_{44}r^4 + S_{35}r^5 + \\
S_{26}r^6 + S_{17}r^7 + S_{08}r^8 = 0
\end{aligned} \quad (14-25)$$

式中:  $r$  是  $m$  的函数,  $S_{80}, \dots, S_{08}$  具体形式复杂, 本节略。

特征方程(14-25)有 8 个特征根  $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3, 5, 7$ )。

考虑一般性, 再设

$$\begin{aligned} U &= \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{in\pi s\xi} e^{in\pi\eta} \\ V &= \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{in\pi s\xi} e^{in\pi\eta} \\ W &= \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{in\pi s\xi} e^{in\pi\eta} \end{aligned} \quad (14-26)$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

类似地, 可得另一个特征方程(14-27)、8 个特征根  $s_k, s_{k+1}$  ( $k=1, 3, 5, 7$ ):

$$T_{60}s^6 + T_{51}s^5 + T_{42}s^4 + T_{33}s^3 + T_{24}s^2 + T_{15}s + T_{06} = 0 \quad (14-27)$$

斜形板振动问题齐次解与上一章矩形板振动问题齐次解相似。

## 2. 补充解

补充解可以根据常微分方程理论求得。当  $m=0$  时

$$\begin{aligned} U(\eta) &= e_y e^{\tau\eta} \\ V(\eta) &= f_y e^{\tau\eta} \\ W(\eta) &= g_y e^{\tau\eta} \end{aligned} \quad (14-28)$$

式中:  $g_y, e_y$  和  $f_y$  为待定常数,  $\tau$  为特征根。

将式(14-28)代入方程(14-21)可得:

$$SS_{08}\tau^4 + SS_{04} = 0 \quad (14-29)$$

当  $n=0$  时, 又设:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\ V(\xi) &= p_x e^{h\xi} \end{aligned} \quad (14-30)$$



$$W(\xi) = q_x e^{h\xi}$$

式中:  $o_x, p_x$  和  $q_x$  为待定常数,  $h$  为特征根。

将式(14-30)代入方程(14-21)可得:

$$SS_{80}h^4 + SS_{40} = 0 \quad (14-31)$$

补充解可合写为:

$$\begin{aligned} U^{**} = & t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + t_5(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_6(\eta - 0.5)^2 + t_7(\xi - 0.5)^3 + t_8(\eta - 0.5)^3 + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, e_{yk}, e_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{xk}, o_{xk+1}) \end{aligned} \quad (14-32)$$

$$\begin{aligned} V^{**} = & t_9 + t_{10}(\xi - 0.5) + t_{11}(\eta - 0.5) + t_{12}(\xi - 0.5)^2 + \\ & t_{13}(\eta - 0.5)^2 + t_{14}(\xi - 0.5)^3 + t_{15}(\eta - 0.5)^3 + \\ & \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{xk}, p_{xk+1}) \end{aligned} \quad (14-33)$$

$$W^{**} = t_1 + \sum_{k=1,3} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, g_{yk}, g_{yk+1}) + \sum_{k=1,3} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{xk}, q_{xk+1}) \quad (14-34)$$

式中:  $(g_{yk}, g_{yk+1}, q_{xk}, q_{xk+1}, k=1,3)$  为 8 个待定常数。

$\tau_k, \tau_{k+1} (k=1,3)$  是方程(14-29)的根,  $h_k, h_{k+1} (k=1,3)$  是方程(14-40)的根。

将式(14-32)、式(14-33)和式(14-34)的多项式部分代入方程式(14-21), 可得  $t_k (k=1, 2, \dots, 15)$  之间的 7 个关系式。

将式(14-32)、式(14-33)和式(14-34)的  $\Gamma$  函数部分代入方程式(14-21)的任意 2 式可得 2 个系数关系矩阵:

$$\begin{bmatrix} e_{y1} \\ e_{y2} \\ e_{y3} \\ e_{y4} \\ f_{y1} \\ f_{y2} \\ f_{y3} \\ f_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZR_{11k} & -ZR_{21k} & ZR_{13k} & -ZR_{23k} \\ ZR_{21k} & -ZR_{11k} & ZR_{23k} & -ZR_{13k} \\ ZR_{31k} & -ZR_{41k} & ZR_{33k} & -ZR_{43k} \\ ZR_{41k} & -ZR_{31k} & ZR_{43k} & -ZR_{33k} \\ RR_{11k} & -RR_{21k} & RR_{13k} & -RR_{23k} \\ RR_{21k} & -RR_{11k} & RR_{23k} & -RR_{13k} \\ RR_{31k} & -RR_{41k} & RR_{33k} & -RR_{43k} \\ RR_{41k} & -RR_{31k} & RR_{43k} & -RR_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{y1} \\ g_{y2} \\ g_{y3} \\ g_{y4} \end{bmatrix} \quad (14-35)$$

$$\begin{bmatrix} o_{x1} \\ o_{x2} \\ o_{x3} \\ o_{x4} \\ p_{x1} \\ p_{x2} \\ p_{x3} \\ p_{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZT_{11} & -ZT_{21} & ZT_{13} & -ZT_{23} \\ ZT_{21} & -ZT_{11} & ZT_{23} & -ZT_{13} \\ ZT_{31} & -ZT_{41} & ZT_{33} & -ZT_{43} \\ ZT_{41} & -ZT_{31} & ZT_{43} & -ZT_{33} \\ RT_{11} & -RT_{21} & RT_{13} & -RT_{23} \\ RT_{21} & -RT_{11} & RT_{23} & -RT_{13} \\ RT_{31} & -RT_{41} & RT_{33} & -RT_{43} \\ RT_{41} & -RT_{31} & RT_{43} & -RT_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \\ q_{x4} \end{bmatrix} \quad (14-36)$$

补充解式(14-32)、式(14-33)和式(14-34)只有 16 个独立待定常数。

### 3. 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理,可将齐次解、补充解组合起来,可得到以  $\xi$ 、 $\eta$  形式表示的一般解析解:

$W =$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \quad (14 - 37)$$

$$U =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (Z_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (Z_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (Z_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (Z_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (T_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (T_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (T_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (T_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + U^{**} \end{aligned} \quad (14 - 38)$$

$$V =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (R_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{1km} (R_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (R_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} G_{2km} (R_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (S_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{1kn} (S_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (S_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7} Q_{2kn} (S_{41k} \Psi_k(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + V^{**}
\end{aligned}
\tag{14-39}$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1,3,5,7)$  和补充解中的 16 个独立待定常数是待定实数常数。

实际计算中, 设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解式(14.37)、式(14.38)、式(14.39)共有  $16M+16$  个未知数(  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1,3,5,7)$  和 16 个补充解中独立待定常数)。对于一般铺设斜形板 屈曲、振动问题, 共有 16 个独立的边界条件。将解析解代入 16 个边界条件中, 形成 16 个方程, 将所得每个方程展成  $(M+1)$  项余弦级数, 可以得到  $16M+16$  个线性代数方程, 合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \tag{14-40}$$

式中:  $K$  为  $(16M+16) \times (16M+16)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, Q_{17M}, Q_{27M}, t_1, \dots\}$$

当方程(14-40)有异于零的解(即  $\{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, Q_{17M}, Q_{27M}\}$  和  $\{t_1, \dots\}$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  即为所求频率。

## 第 15 章 基于一阶剪切理论的任意铺设复合材料斜形板静力响应解析

复合材料层间剪切模量一般只有沿纤维方向模量的数十分之一。处理复合材料结构力学问题时,很多情况下,需要考虑沿厚度方向剪切变形的影响。剪切变形引入,使计算变得很复杂。任意铺设层合板的各向异性、呈层性将引起拉弯之间、拉剪之间和弯扭之间一系列耦合效应,而斜形板边界条件处理也产生困难。基于剪切变形理论的任意铺设层合斜形板力学分析更为复杂。任意铺设层合斜板剪切理论控制方程为偏微分方程组,未知函数为 5 个。在本书前几章基础上,综合引入斜坐标变换和复数级数方法,可以成功求解基于剪切变形理论的任意铺设复合材料矩形薄板横向弯曲。本章建立了这种情况下的任意铺设斜板一般解析解,并进行数值计算以验证了所得到一般解析解的收敛性和稳定性后,研究了任意铺设层合板的铺层对称性,同时结合四边固支固定边界给出了部分计算结果。

### 15.1 力学控制方程

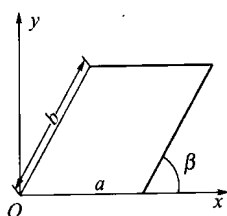
与第 14 章相仿,考虑复合材料斜形板,板长为  $a$ ,板宽为  $b$ ,厚度为  $h$ ,斜角为  $\beta$ 。板面承受均布载荷  $q$ ,见图 15-1。

$$x = a\xi + b\eta\cos\beta; y = \eta b\sin\beta \quad (15-1)$$

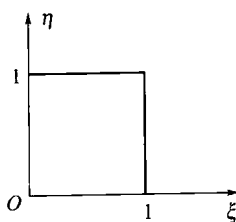
存在如下坐标变换关系:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{\cot\beta}{a} & \frac{1}{b\sin\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (15-2)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{\cot^2\beta}{a^2} & \frac{1}{b^2\sin^2\beta} & -\frac{2\cot\beta}{ab\sin\beta} \\ -\frac{\cot\beta}{a^2} & 0 & \frac{1}{ab\sin\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (15-3)$$



(a)



(b)

图 15-1 斜坐标系示意图

## 1. 几何关系, 物理关系

见本书第 11 章的式(11-2)、式(11-3)和式(11-4)。

## 2. 平衡方程

见本书第 11 章的式(11-5)。

在斜坐标系下, 引入式(15-1)、式(15-2)和式(15-3), 斜形板控制偏微分方程式(11-5)可改写为

$$LL_{11}U + LL_{12}V + LL_{13}\Phi_x + LL_{14}\Phi_y + LL_{15}W = 0$$

$$LL_{21}U + LL_{22}V + LL_{23}\Phi_x + LL_{24}\Phi_y + LL_{25}W = 0$$

$$LL_{31}U + LL_{32}V + LL_{33}\Phi_x + LL_{34}\Phi_y + LL_{35}W = 0$$

$$LL_{41}U + LL_{42}V + LL_{43}\Phi_x + LL_{44}\Phi_y + LL_{45}W = 0$$

$$LL_{51}U + LL_{52}V + LL_{53}\Phi_x + LL_{54}\Phi_y + LL_{55}W = P \quad (15-4)$$

式中：

$$\begin{aligned}
 LL_{11} &= (A_{11} - 2A_{16}\cot\beta + A_{66}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
 &\quad \frac{(2A_{16} - 2A_{66}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \\
 LL_{12} &= LL_{21} = \\
 &\quad (A_{16} - (A_{12} + A_{66})\cot\beta + A_{26}\cot^3\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
 &\quad \frac{((A_{12} + A_{66}) - 2A_{26}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \\
 LL_{13} &= \left( (B_{11} - 2B_{16}\cot\beta + B_{66}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(2B_{16} - 2B_{66}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \frac{1}{h} \\
 LL_{31} &= (B_{11} - 2B_{16}\cot\beta + B_{66}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
 &\quad \frac{(2B_{16} - 2B_{66}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \\
 LL_{14} &= LL_{23} = \left( (B_{16} - (B_{12} + B_{66})\cot\beta + B_{26}\cot^3\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{((B_{12} + B_{66}) - 2B_{26}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \frac{1}{h} \\
 LL_{41} &= LL_{32} = (B_{16} - (B_{12} + B_{66})\cot\beta + B_{26}\cot^3\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\
 &\quad \frac{((B_{12} + B_{66}) - 2B_{26}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}
 \end{aligned}$$

$$LL_{22} = (A_{66} - 2A_{26}\cot\beta + A_{22}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} +$$

$$\frac{(2A_{26} - 2A_{22}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{24} = \left( (B_{66} - 2B_{26}\cot\beta + B_{22}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. \frac{(2B_{26} - 2B_{22}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{42} = (B_{66} - 2B_{26}\cot\beta + B_{22}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} +$$

$$\frac{(2B_{26} - 2B_{22}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{33} = \left( (D_{11} - 2D_{16}\cot\beta + D_{66}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. \frac{(2D_{16} - 2D_{66}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{55}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{34} = LL_{43} = \left( (D_{16} - (D_{12} + D_{66})\cot\beta + D_{26}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. \frac{((D_{12} + D_{66}) - 2D_{26}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{45}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{44} = \left( (D_{66} - 2D_{26}\cot\beta + D_{22}\cot^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. \frac{(2D_{26} - 2D_{22}\cot\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{44}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{15} = -LL_{51} = 0$$

$$LL_{25} = -LL_{52} = 0$$



$$LL_{35} = \left( - (A_{55} - A_{45} \cot \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A_{45}}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a$$

$$LL_{53} = - \left( - (A_{55} - A_{45} \cot \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A_{45}}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{45} = \left( - (A_{45} - A_{44} \cot \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A_{44}}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a$$

$$LL_{54} = - \left( - (A_{45} - A_{44} \cot \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A_{44}}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{55} = (A_{55} - 2A_{45} \cot \beta + A_{44} \cot^2 \beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} +$$

$$\frac{(2A_{45} - 2A_{44} \cot \beta)}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A_{44}}{\sin^2 \beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

式中:  $q$  为分布横向载荷;  $A_{ij}(i, j = 1, 2, 4, 5)$ ,  $B_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$ ,  $D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$  结构刚度系数。

$$(A_{ij}, A_{ij}, A_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^m(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$A_{44} = A/(AB - C^2) \quad A_{45} = B/(AB - C^2) \quad A_{55} = C/(AB - C^2)$$

$$A = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{44}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k \quad B = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{55}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k$$

$$C = \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^N (Q_{45}^{(k)} / [\Delta Q]^2 H_k$$

$$[\Delta Q]^2 = Q_{44}^{(k)} Q_{55}^{(k)} - [Q_{45}^{(k)}]^2$$

$$H_k = h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{h^2} + \frac{16}{5} \frac{h_k^5 - h_{k-1}^5}{h^4}$$

$$U = \frac{u}{h}, V = \frac{v}{h}, W = \frac{w}{h}, \alpha = \frac{a}{b}, P = \frac{q}{a^2}。$$

通过坐标变换可以把内力矩、剪力均以斜坐标表示。

## 15.2 斜板弯曲问题求解过程

### 1. 通解的推导

本章采用位移法求解, 设

$$\begin{aligned} U &= \sum_{-\infty}^{\infty} E e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ V &= \sum_{-\infty}^{\infty} F e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ \Phi_x &= \sum_{-\infty}^{\infty} C e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ \Phi_y &= \sum_{-\infty}^{\infty} D e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \\ W &= \sum_{-\infty}^{\infty} G e^{i m \sigma \xi} e^{i m \sigma \eta r} \end{aligned} \quad (15-5)$$

式中:  $i$  为虚数单位;  $m$  为整数;  $r$  为特征根。

将式(15-5)代入式(15-4), 当  $m$  不为 0 时, 可推得有关  $r$  的 10 次特征代数方程

$$\begin{aligned} S_{100} + S_{91}r + S_{82}r^2 + S_{73}r^3 + S_{64}r^4 + S_{55}r^5 + S_{46}r^6 + \\ S_{37}r^7 + S_{28}r^8 + S_{19}r^9 + S_{010}r^{10} = 0 \end{aligned} \quad (15-6)$$

式中:  $S_{kl}$  可由行列式演算而得, 具体形式略。

对于一般铺设的复合材料板, 式(15-6)有 5 对共轭复根

$$a_k \pm b_k i (k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (15-7)$$

采用本书第 3 章类似的步骤, 可以推得的实数形式级数通解合写如下

$$(U, V, \Phi_x, \Phi_y, W) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{1km}, F_{1km}, EY_{1km}, FY_{1km}, G_{1km})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{2km}, F_{2km}, EY_{2km}, FY_{2km}, G_{2km}) \\
& \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{3km}, F_{3km}, EY_{3km}, FY_{3km}, G_{3km}) \\
& \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (E_{4km}, F_{4km}, EY_{4km}, FY_{4km}, G_{4km}) \\
& \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \quad (15-8)
\end{aligned}$$

将式(15-8)代入式(15-4)任4式,从基本解的独立性出发,可得到  $E_{ijm}, F_{ijm}, EY_{ijm}, FY_{ijm}, G_{ijm}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 之间的关系式。这样可得8组线性方程,用计算程序可简单地得到下面关系矩阵

$$\begin{bmatrix} E_{1km} \\ E_{2km} \\ E_{3km} \\ E_{4km} \\ F_{1km} \\ F_{2km} \\ F_{3km} \\ F_{4km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11k} & -Z_{21k} & Z_{13k} & -Z_{23k} \\ Z_{21k} & -Z_{11k} & Z_{23k} & -Z_{13k} \\ Z_{31k} & -Z_{41k} & Z_{33k} & -Z_{43k} \\ Z_{41k} & -Z_{31k} & Z_{43k} & -Z_{33k} \\ R_{11k} & -R_{21k} & R_{13k} & -R_{23k} \\ R_{21k} & -R_{11k} & R_{23k} & -R_{13k} \\ R_{31k} & -R_{41k} & R_{33k} & -R_{43k} \\ R_{41k} & -R_{31k} & R_{43k} & -R_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{bmatrix} \quad (15-9)$$

$$\begin{bmatrix} EY_{1km} \\ EY_{2km} \\ EY_{3km} \\ EY_{4km} \\ EY_{1km} \\ EY_{2km} \\ EY_{3km} \\ EY_{4km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZY_{11k} & -ZY_{21k} & ZY_{13k} & -ZY_{23k} \\ ZY_{21k} & -ZY_{11k} & ZY_{23k} & -ZY_{13k} \\ ZY_{31k} & -ZY_{41k} & ZY_{33k} & -ZY_{43k} \\ ZY_{41k} & -ZY_{31k} & ZY_{43k} & -ZY_{33k} \\ RY_{11k} & -RY_{21k} & RY_{13k} & -RY_{23k} \\ RY_{21k} & -RY_{11k} & RY_{23k} & -RY_{13k} \\ RY_{31k} & -RY_{41k} & RY_{33k} & -RY_{43k} \\ RY_{41k} & -RY_{31k} & RY_{43k} & -RY_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1km} \\ G_{2km} \\ G_{3km} \\ G_{4km} \end{bmatrix}$$

(15 - 10)

当  $m$  为 0 时, 设

$$U = U_y e^{\eta}$$

$$V = V_y e^{\eta}$$

$$\Phi_x = \Phi_{xy} e^{\eta}$$

$$\Phi_y = \Phi_{yy} e^{\eta}$$

$$W = W_y e^{\eta} \quad (15 - 11)$$

将式(15-11)代入式(15-4)可得控制方程及其特征根:  $\pm a_0$

本章又设

$$U = \sum_{-\infty}^{\infty} O e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\tau\eta}$$

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} P e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\tau\eta}$$

$$\Phi_x = \sum_{-\infty}^{\infty} O X e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\tau\eta} \quad (15 - 12)$$

$$\Phi_y = \sum_{-\infty}^{\infty} P X e^{i\sigma\omega\xi} e^{i\sigma\tau\eta}$$

$$W = \sum_{-\infty}^{\infty} Q e^{i n \pi \xi} e^{i n \pi \eta}$$

与上文类似,可得有关  $s$  的特征方程式(15-13)、5 对不等共轭虚根  $c_k \pm d_k i (k=1,2,3,4,5)$  和关系矩阵:

$$T_{100}s^{10} + T_{91}s^9 + T_{82}s^8 + T_{73}s^7 + T_{64}s^6 + T_{55}s^5 + T_{46}s^4 + T_{37}s^3 + T_{28}s^2 + T_{19}s + T_{010} = 0 \quad (15-13)$$

$$\begin{bmatrix} O_{1kn} \\ O_{2kn} \\ O_{3kn} \\ O_{4kn} \\ P_{1kn} \\ P_{2kn} \\ P_{3kn} \\ P_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11k} & -T_{21k} & T_{13k} & -T_{23k} \\ T_{21k} & -T_{11k} & T_{23k} & -T_{13k} \\ T_{31k} & -T_{41k} & T_{33k} & -T_{43k} \\ T_{41k} & -T_{31k} & T_{43k} & -T_{33k} \\ S_{11k} & -S_{21k} & S_{13k} & -S_{23k} \\ S_{21k} & -S_{11k} & S_{23k} & -S_{13k} \\ S_{31k} & -S_{41k} & S_{33k} & -S_{43k} \\ S_{41k} & -S_{31k} & S_{43k} & -S_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix}$$

(15-14)

$$\begin{bmatrix} OX_{1kn} \\ OX_{2kn} \\ OX_{3kn} \\ OX_{4kn} \\ PX_{1kn} \\ PX_{2kn} \\ PX_{3kn} \\ PX_{4kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX_{11k} & -TX_{21k} & TX_{13k} & -TX_{23k} \\ TX_{21k} & -TX_{11k} & TX_{23k} & -TX_{13k} \\ TX_{31k} & -TX_{41k} & TX_{33k} & -TX_{43k} \\ TX_{41k} & -TX_{31k} & TX_{43k} & -TX_{33k} \\ SX_{11k} & -SX_{21k} & SX_{13k} & -SX_{23k} \\ SX_{21k} & -SX_{11k} & SX_{23k} & -SX_{13k} \\ SX_{31k} & -SX_{41k} & SX_{33k} & -SX_{43k} \\ SX_{41k} & -SX_{31k} & SX_{43k} & -SX_{33k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1kn} \\ Q_{2kn} \\ Q_{3kn} \\ Q_{4kn} \end{bmatrix}$$

(15-15)

同样可得对应的实数形式级数通解合写如下:

$$\begin{aligned}
(U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{1kn}, P_{1kn}, OX_{1kn}, PX_{1kn}, Q_{1kn}) \\
& \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{2kn}, P_{2kn}, OX_{2kn}, PX_{2kn}, Q_{2kn}) \\
& \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{3kn}, P_{3kn}, OX_{3kn}, PX_{3kn}, Q_{3kn}) \\
& \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 (O_{4kn}, P_{4kn}, OX_{4kn}, PX_{4kn}, Q_{4kn}) \\
& \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k}
\end{aligned} \tag{15-16}$$

当  $n$  为 0 时, 可设

$$\begin{aligned}
U &= U_x e^{r\xi} \\
V &= V_x e^{r\xi} \\
\Phi_x &= \Phi_{xx} e^{r\xi} \\
\Phi_y &= \Phi_{yx} e^{r\xi} \\
W &= W_x e^{r\xi}
\end{aligned} \tag{15-17}$$

同样将式(15-17)代入式(15-4), 亦可得控制方程及其特征根:  $\pm c_0$ 。

从线性偏微分方程解得可迭加性出发, 在式(15-8)和式(15-16)基

础上补充多项式及特解, 可得一般解析解:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \\
 & t_1 + t_2 (\xi - 0.5)^2 + t_3 (\eta - 0.5)^2 + t_4 (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + \\
 & t_5 (\xi - 0.5) + t_6 (\eta - 0.5) + \\
 & W_{y1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + W_{y2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + W_{x1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\
 & W_{x2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + W^{**} \quad (15 - 18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
 & \left. Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
 & \left. Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( Z_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
 & \left. Z_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( Z_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. Z_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sinh n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sinh n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( T_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sinh n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sinh n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( T_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. T_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& t_7 + t_8 (\xi - 0.5) + t_9 (\eta - 0.5) + t_{10} (\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{11} (\eta - 0.5)^2 + t_{12} (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + \\
& U_{y1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + U_{y2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + U_{x1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\
& U_{x2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + U^{**} \tag{15 - 19}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
V = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( R_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. R_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( R_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. R_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( S_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. S_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \Big) + \\
& t_{13} + t_{14} (\xi - 0.5) + t_{15} (\eta - 0.5) + t_{16} (\xi - 0.5)^2 + \\
& t_{17} (\eta - 0.5)^2 + t_{18} (\xi - 0.5) (\eta - 0.5) + \\
& V_{y1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + V_{y2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + V_{x1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\
& V_{x2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + V^{**} \tag{15-20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( ZY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& ZY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( ZY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& ZY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( ZY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& ZY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( ZY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& ZY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( TX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& TX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \left. \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( TX_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& TX_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \left. \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( TX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& TX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \left. \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( TX_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& TX_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \left. \right) + \\
& t_{19} + t_{20} (\xi - 0.5) + t_{21} (\eta - 0.5) + \\
& \Phi_{xy1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{xy2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{xx1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\
& \Phi_{xx2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + \Phi_x^{**} \quad (15 - 21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( RY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& RY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \left. \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{1km} \left( RY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& RY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( RY_{21k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \sin m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. RY_{11k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \sin m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 G_{2km} \left( RY_{41k} \frac{\sinh m \pi b_k \eta \cos m \pi (a_k (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_k} + \right. \\
& \left. RY_{31k} \frac{\sinh m \pi b_k (1 - \eta) \cos m \pi (a_k \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( SX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. SX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{1kn} \left( SX_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. SX_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( SX_{21k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \sin n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. SX_{11k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \sin n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^5 Q_{2kn} \left( S_{41k} \frac{\sinh n \pi d_k \xi \cos n \pi (c_k (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_k} + \right. \\
& \left. S_{31k} \frac{\sinh n \pi d_k (1 - \xi) \cos n \pi (c_k \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_k} \right) + \\
& t_{21} + t_{22} (\xi - 0.5) + t_{23} (\eta - 0.5) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{\gamma\gamma 1} \frac{\sinh(a_0 \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma\gamma 2} \frac{\sinh a_0 (1 - \eta)}{\sinh(a_0)} + \Phi_{\gamma\gamma 1} \frac{\sinh(c_0 \xi)}{\sinh(c_0)} + \\ & \Phi_{\gamma\gamma 2} \frac{\sinh c_0 (1 - \xi)}{\sinh(c_0)} + \Phi_{\gamma}^{**} \end{aligned} \quad (15 - 22)$$

式中:  $W^{**}$ 、 $U^{**}$ 、 $V^{**}$  为特解。

## 2. 特解的建立

对于横向弯曲问题, 本书引入势函数  $\Phi$ , 引进微分算子  $D_0$ , 它是以算子  $LL_{ij}$  组成得  $5 \times 5$  行列式, 并令  $D_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 表示给该行列式的代数余子式。使

$$U = D_{51} \Phi \quad V = D_{52} \Phi \quad \Phi_x = D_{53} \Phi \quad \Phi_\gamma = D_{54} \Phi \quad W = D_{55} \Phi \quad (15 - 23)$$

依照线性代数理论, 基本微分方程可以写成

$$D_0 \Phi = p \quad (15 - 24)$$

展开为

$$\begin{aligned} & SS_{100} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^{10}} + SS_{91} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^9 \partial \eta} + SS_{82} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^8 \partial \eta^2} + SS_{73} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta^3} + SS_{64} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^4} + \\ & SS_{55} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^5} + SS_{46} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^6} + SS_{37} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^7} + SS_{28} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^8} + SS_{19} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \xi \partial \eta^9} + \\ & SS_{010} \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial \eta^{10}} + SS_{80} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + SS_{71} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^7 \partial \eta} + SS_{62} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} + SS_{53} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta^3} + \\ & SS_{44} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} + SS_{35} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \eta^5} + SS_{26} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^6} + SS_{17} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^7} + SS_{08} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} = P \end{aligned} \quad (15 - 25)$$

对于均布载荷, 本书选取

$$\Phi = \frac{P}{81216} \left( \frac{(\xi - 0.5)^8}{SS_{80}} + \frac{(\xi - 0.5)^4 (\eta - 0.5)^4}{SS_{44}} + \frac{(\eta - 0.5)^8}{SS_{08}} \right) \quad (15 - 26)$$

从而可推出各位移特解。

### 3. 边界条件

典型边界条件有简支、固支和自由边界三大类。在  $(xOy)$  坐标系下三类边界条件可表示为

$$S: w = M_n = U = V = \Phi_s = 0$$

$$C: w = \Phi_n = U = V = \Phi_s = 0$$

$$F: Q_n = M_n = N_n = N_{ns} = M_{ns} = 0 \quad (15-27)$$

式中:  $Q_n$  和  $M_n$  分别是垂直于板边界的剪力和弯矩;  $\Phi_n$  为板边界切线相对板中面的转角; 下标  $n, t$  分别代表边界的法向、切向:

$M_n, \Phi_n, Q_n, N_n, N_{nt}$  可表示为

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y$$

$$\Phi_n = \frac{\partial W}{\partial x} n_x + \frac{\partial W}{\partial y} n_y$$

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y$$

$$N_n = N_x n_x^2 + N_y n_y^2 + 2N_{xy} n_x n_y$$

$$N_{nt} = (N_y - N_x) n_x n_y + N_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \quad (15-28)$$

式中:  $n_x = \cos\phi, n_y = \sin\phi, \phi$  是边界法线相对于  $x$  轴角度。将式(15-2)和式(15-3)带入式(15-27)和式(15-28), 可得斜坐标系  $(\xi O\eta)$  下的边界条件。

### 4. 求解模式

将式(15-18)、式(15-19)、式(15-20)、式(15-21)、式(15-22)中多项式+梁函数补充解代入式(15-4)可建立  $23$  个独立方程。在实际计算中, 不可能取无穷大, 设最大取  $M$ , 这样一般解析解式(15-18)~式(15-22)共有  $20M + 20$  个独立未知数。对于任意铺设矩形板, 每边有  $5$  个边界条件, 共有  $20$  个边界条件。将一般解析解代入  $20$  个边界条件中, 形成  $20$  个方程, 将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数。根据正弦级数的正交性, 可以得到  $20M$  个线性代数方程。在每个板角可建立有关于位移(如挠度、转角、面内位移)、内力(剪力弯矩扭矩等)共  $5$  个角点条件, 这样共建立  $20M + 20$  个方程, 可以求解  $20M + 20$

个未知数,横向弯曲问题得解。

### 15.3 解析解的数值计算结果分析

本章对四边简支和四边固支的斜板进行计算。板材料参数为

$$E_1 = 40\text{GPa} \quad E_2 = 1\text{GPa} \quad G_{12} = 0.6\text{GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} \quad G_{23} = 0.5G_{12} \quad \gamma_{12} = 0.25$$

对四边固支(CCCC)板,斜坐标系下边界条件为

$$W(0, \eta) = 0, W(1, \eta) = 0, W(\xi, 0) = 0, W(\xi, 1) = 0$$

$$U(0, \eta) = 0, U(1, \eta) = 0, U(\xi, 0) = 0, U(\xi, 1) = 0$$

$$V(0, \eta) = 0, V(1, \eta) = 0, V(\xi, 0) = 0, V(\xi, 1) = 0$$

$$\frac{\partial W(0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial W(1, \eta)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial W(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial W(\xi, 1)}{\partial \eta} = 0$$

对四边简支(SSSS)板,斜坐标系下边界条件为

$$W(0, \eta) = 0, W(1, \eta) = 0, W(\xi, 0) = 0, W(\xi, 1) = 0$$

$$U(0, \eta) = 0, U(1, \eta) = 0, U(\xi, 0) = 0, U(\xi, 1) = 0$$

$$V(0, \eta) = 0, V(1, \eta) = 0, V(\xi, 0) = 0, V(\xi, 1) = 0$$

$$M_\xi(0, \xi) = 0, M_\xi(1, \xi) = 0, M_\eta(\xi, 0) = 0, M_\eta(\xi, 1) = 0$$

#### 1. 收敛性验证算例

针对 CCCC 四边固支斜板(板结构参数为  $b/a = 1.0$ ,  $h/a = 0.1$ ,  $\beta = 60^\circ$ )。斜板承受均布载荷  $p$ , 层合板铺设方式为  $[-89.9^\circ/11.1^\circ/14.5^\circ]$ 。通过增加级数项  $M$ , 观察斜板中心挠度, 可以发现随着级数项  $M$  值增大, 板中心挠度趋向稳定(见表 15-1)。

表 15-1 斜板中心无量纲挠度  $\bar{W} = 1000wE_2h^3/qb^4$

$M$	10	20	30	40	50
$\bar{W}(\text{CCCC})$	3.481	3.480	3.480	3.480	3.480

## 2. 正确性验证算例

针对四边简支斜板进行计算。斜形层合板承受均布载荷  $p$ , 铺设方式为  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta-\Delta\theta]$ , 斜角为  $\beta$ 。板结构参数为  $b/a=1.0, h/a=0.01, \theta=45^\circ$ 。  $\Delta\theta$  取三个值 ( $\Delta\theta=5^\circ, 3^\circ, 1^\circ$ )。斜角  $\beta$  取三个值 ( $\beta=85^\circ, 87^\circ, \beta=89^\circ$ )。参考解来自 Noor 和 Mathers 的计算结果<sup>[8]</sup>。根据本章算法, 当  $\Delta\theta$  和  $90^\circ-\beta$ , 逐渐减小时, 本章解逐渐趋向参考解 (见表 15-2)。

表 15-2 SSSS 层合斜板中心无量纲挠度值  $\bar{W}=1000wE_2h^3/pb^4$

$\beta/(^\circ)$	Model	$\Delta\theta$	$\bar{W}$
85 87 89	本章解 $a/h=0.01$	$M=40$	
		$\Delta\theta=5^\circ$	2.548
		$\Delta\theta=3^\circ$	2.485
		$\Delta\theta=1^\circ$	2.418
90	参考解	$\Delta\theta=0$	2.408

按本书的方法对  $[\theta/90^\circ-\theta]_N$  铺设的 CCCC 两类层合板进行计算分析, 板最上 1 层铺设角为  $+\theta$ 。铺设材料参数为  $E_1=181\text{GPa}, E_2=10.3\text{GPa}, G_{12}=7.17\text{GPa}, \gamma_{12}=0.28$ 。计算中固定板厚度、板长度  $a$  而改变铺设层数、铺设角度、纵宽比、斜角, 计算结果表示在图 15-2 ~ 图 15-4。

通过对计算结果分析可得如下结论:

(1) 铺设方式与铺设角对层合结构影响很大。不同铺设角的板刚度是不同的。

(2) 对于本节规定的铺设方式, 层数增大, 板最大挠度值在减小, 当  $2N>6$  后减小趋势在减弱。

(3) 对于同样板长度  $a$ , 不同斜角下, 板最大挠度随铺设方式变化趋势没有固定的规律, 需要逐一计算。

(4)  $h/a$  于板剪切变形值相关联。在不同的铺设方式下,  $h/a$  值减少一般表示剪切变形的减少。如图 15-3 所示, 当  $h/a$  小于 0.02 时, 基本可不考虑剪切变形效应。



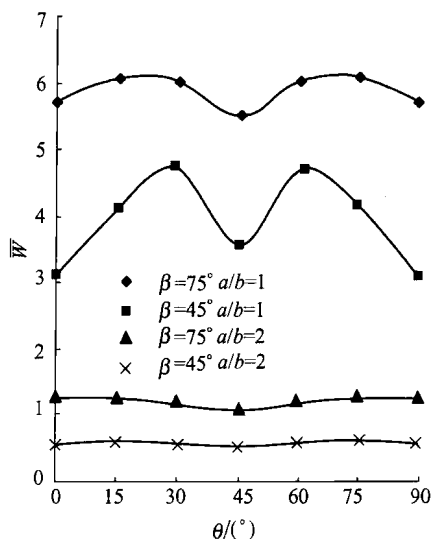


图 15-2 CCCC 层合斜板 $[\theta/90^{\circ}-\theta]$ 中心无量纲挠度  
 $\bar{W} = wE_2 h^3 1000 / qa^3 b \sin \beta$  与铺设角变化趋势 ( $b=1\text{m}, h/b=0.1$ )

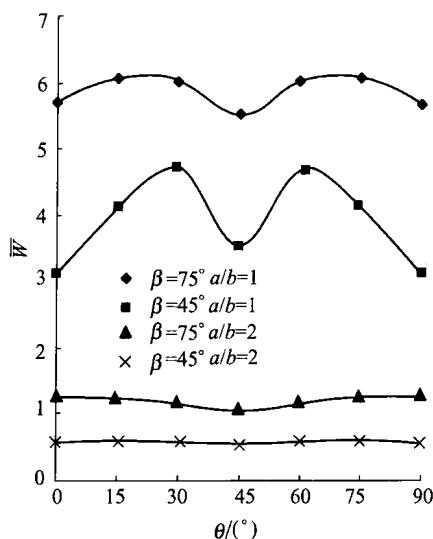


图 15-3 SSSS 层合斜板 $[\theta/90^{\circ}-\theta/\theta/90^{\circ}-\theta/\theta/90^{\circ}-\theta]$ 中心无量纲挠度  
 $\bar{W} = wE_2 h^3 1000 / qa^3 b \sin \beta$  与  $h/a$  变化趋势 ( $b=1\text{m}, h/b=0.1, \beta=50^{\circ}, \theta=40^{\circ}$ )

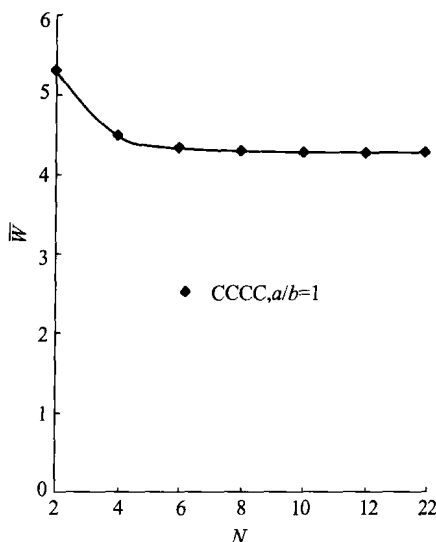


图 15-4 CCCC 层合斜板  $[\theta/90^\circ - \theta]_N$  中心无量纲挠度

$\bar{W} = wE_2 h^3 1000 / qa^3 b \sin \beta$  与铺设层数  $2N$  变化趋势

( $b = 1\text{m}, h/a = 0.1, \theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ )

## 15.4 基于一阶剪切理论的一般铺设复合材料斜形板振动问题解析

基于一阶剪切理论的一般角铺设复合材料斜形板振动问题控制方程为下式：

$$LL_{11}U + LL_{12}V + LL_{13}\Phi_x + LL_{14}\Phi_y + LL_{15}W = 0$$

$$LL_{21}U + LL_{22}V + LL_{23}\Phi_x + LL_{24}\Phi_y + LL_{25}W = 0$$

$$LL_{31}U + LL_{32}V + LL_{33}\Phi_x + LL_{34}\Phi_y + LL_{35}W = 0 \quad (15-29)$$

$$LL_{41}U + LL_{42}V + LL_{43}\Phi_x + LL_{44}\Phi_y + LL_{45}W = 0$$

$$LL_{51}U + LL_{52}V + LL_{53}\Phi_x + LL_{54}\Phi_y + LL_{55}W = 0$$

式中： $\omega$  为振动频率， $\rho$  为板单位面积密度。

$$LL_{11} = (A_{11} - 2A_{16}\text{ctan}\beta + A_{66}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2A_{16} - 2A_{66}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{12} = LL_{21} =$$

$$(A_{16} - (A_{12} + A_{66})\text{ctan}\beta + A_{26}\text{ctan}^3\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{((A_{12} + A_{66}) - 2A_{26}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{13} = \left( (B_{11} - 2B_{16}\text{ctan}\beta + B_{66}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2B_{16} - 2B_{66}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \right.$$

$$\left. \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{31} = (B_{11} - 2B_{16}\text{ctan}\beta + B_{66}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2B_{16} - 2B_{66}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{14} = LL_{23} = \left( (B_{16} - (B_{12} + B_{66})\text{ctan}\beta + B_{26}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. \frac{((B_{12} + B_{66}) - 2B_{26}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{41} = LL_{32} = (B_{16} - (B_{12} + B_{66})\text{ctan}\beta + B_{26}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} +$$

$$\frac{((B_{12} + B_{66}) - 2B_{26}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{22} = (A_{66} - 2A_{26}\text{ctan}\beta + A_{22}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2A_{26} - 2A_{22}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta}$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{A_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{24} = \left( (B_{66} - 2B_{26}\text{ctan}\beta + B_{22}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2B_{26} - 2B_{22}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \right. \\ \left. \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{42} = (B_{66} - 2B_{26}\text{ctan}\beta + B_{22}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2B_{26} - 2B_{22}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \\ \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{B_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$LL_{33} = \left( (D_{11} - 2D_{16}\text{ctan}\beta + D_{66}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2D_{16} - 2D_{66}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \right. \\ \left. \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{66}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{55}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{34} = LL_{43} = \left( (D_{16} - (D_{12} + D_{66})\text{ctan}\beta + D_{26}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right. \\ \left. \frac{((D_{12} + D_{66}) - 2D_{26}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{26}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{45}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{44} = \left( (D_{66} - 2D_{26}\text{ctan}\beta + D_{22}\text{ctan}^2\beta) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{(2D_{26} - 2D_{22}\text{ctan}\beta)}{\sin\beta} \right. \\ \left. \alpha \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{D_{22}}{\sin^2\beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - A_{44}a^2 \right) \frac{1}{h}$$

$$LL_{15} = -LL_{51} = 0$$

$$LL_{25} = -LL_{52} = 0$$

$$LL_{35} = \left( - (A_{55} - A_{45}\text{ctan}\beta) \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{45}}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \right) a$$

$$LL_{53} = - \left( - (A_{55} - A_{45}\text{ctan}\beta) \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{45}}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \frac{a}{h}$$

$$LL_{45} = \left( - (A_{45} - A_{44}\text{ctan}\beta) \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{A_{44}}{\sin\beta} \alpha \frac{\partial}{\partial\eta} \right) a$$

$$\begin{aligned}
LL_{54} &= - \left( - (A_{45} - A_{44} \tan \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{A_{44}}{\sin \beta} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{a}{h} \\
LL_{55} &= (A_{55} - 2A_{45} \tan \beta + A_{44} \tan^2 \beta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(2A_{45} - 2A_{44} \tan \beta)}{\sin \beta} \\
&\quad \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A_{44}}{\sin^2 \beta} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho \omega^2 a^2
\end{aligned}$$

## 1. 齐次解

设方程(15-29)有如下齐次解:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \\
U &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m(\eta) e^{im\pi\xi} \\
V &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m(\eta) e^{im\pi\xi} \\
\Phi_x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{ym}(\eta) e^{im\pi\xi} \\
\Phi_y &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{ym}(\eta) e^{im\pi\xi}
\end{aligned} \tag{15-30}$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

设

$$\begin{aligned}
f_m(\eta) &= iGe^{im\pi\eta r} \\
g_m(\eta) &= Ee^{im\pi\eta r} \\
h_m(\eta) &= Fe^{im\pi\eta r} \\
g_{ym}(\eta) &= EYe^{im\pi\eta r} \\
h_{ym}(\eta) &= FYe^{im\pi\eta r}
\end{aligned} \tag{15-31}$$

式中:  $m$  为非 0 整数。  $G, E, F, EY$  和  $FY$  为待定复数常数,  $r$  为特征根。

将式(15-30)和(15-31)代入方程(15-29), 根据所得系数方程组行列式值为 0 条件, 控制方程:

$$SY_{100} + SY_{91}r + SY_{82}r^2 + SY_{73}r^3 + SY_{64}r^4 + SY_{55}r^5 + SY_{46}r^6 + SY_{37}r^7 + SY_{28}r^8 + SY_{19}r^9 + SY_{010}r^{10} = 0 \quad (15-32)$$

式中:  $r_k, r_{k+1}$  ( $k=1, 3, 5, 7, 9$ ) 是  $m$  的函数。  $SY_{100}, \dots, SY_{010}$  具体形式复杂, 本节略。

采取类似步骤,  $(U, V, \Phi_x, \Phi_y, W)$  一组齐次解可表示为实数级数形式:

$$\begin{aligned} (U, V, \Phi_x, \Phi_y, W) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{1km}, F_{1km}, EY_{1km}, FY_{1km}, G_{1km}) \\ & \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{2km}, F_{2km}, EY_{2km}, FY_{2km}, G_{2km}) \\ & \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{3km}, F_{3km}, EY_{3km}, FY_{3km}, G_{3km}) \\ & \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (E_{4km}, F_{4km}, EY_{4km}, FY_{4km}, G_{4km}) \\ & \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \end{aligned} \quad (15-33)$$

式中:  $E_{jkm}, F_{jkm}, EY_{jkm}, FY_{jkm}, G_{jkm}$  ( $j=1, 2, 3, 4, 5, k=1, 3, 5, 7, 9$ ) 为待定实数常数。

将式(15-33)代入式(15-29)任意4个方程式中, 可得类似本章弯曲问题解的关系矩阵。

考虑一般情况, 再设

$$\begin{aligned} W^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(\xi) e^{in\pi\eta} \\ U^* &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} o_n(\xi) e^{in\pi\eta} \end{aligned}$$

$$V^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(\xi) e^{in\pi\eta} \quad (15-34)$$

$$\Phi_x^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} o_{xn}(\xi) e^{in\pi\eta}$$

$$\Phi_y^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{xn}(\xi) e^{in\pi\eta}$$

设

$$\begin{aligned} o_n &= Oe^{in\pi\xi s} \\ p_n &= Pe^{in\pi\xi s} \\ o_{xn} &= OXe^{in\pi\xi s} \\ p_{xn} &= OYe^{in\pi\xi s} \\ q_n &= Qe^{in\pi\xi s} \end{aligned} \quad (15-35)$$

式中:  $n$  为非 0 整数,  $O, P, OX, OY$  和  $Q$  为待定复数常数,  $s$  为特征根。

类似地, 可得另一个特征方程 (15-36)、10 个特征根  $s_k, s_{k+1}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9$ ), 另一组齐次解  $W^*, U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*$ , 2 个系数关系矩阵式:

$$SX_{100}s^{10} + SX_{91}s^9 + SX_{82}s^8 + SX_{73}s^7 + SX_{64}s^6 + SX_{55}s^5 + SX_{46}s^4 + SX_{37}s^3 + SX_{28}s^2 + SX_{19}s + SX_{010} = 0 \quad (15-36)$$

$$(U^*, V^*, \Phi_x^*, \Phi_y^*, W^*) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{1kn}, P_{1kn}, OX_{1kn}, PX_{1kn}, Q_{1kn}) \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{2kn}, P_{2kn}, OX_{2kn}, PX_{2kn}, Q_{2kn}) \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{3kn}, P_{3kn}, OX_{3kn}, PX_{3kn}, Q_{3kn}) \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} (O_{4kn}, P_{4kn}, OX_{4kn}, PX_{4kn}, Q_{4kn}) \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)$$

$$(15-37)$$

## 2. 补充解

根据常微分方程理论可以求得补充解。当  $m=0$  时, 设

$$\begin{aligned}U(\eta) &= e_y e^{\tau \eta} \\V(\eta) &= f_y e^{\tau \eta} \\ \Phi_x(\eta) &= y e_y e^{\tau \eta} \\ \Phi_y(\eta) &= y f_y e^{\tau \eta} \\W(\eta) &= g_y e^{\tau \eta}\end{aligned}\tag{15-38}$$

式中:  $g_y, e_y, f_y, y e_y$  和  $y f_y$  为实数待定常数,  $\tau$  为特征根。

将式(15-38)代入方程(15-29)可得:

$$\tau^4(SSY_{010}\tau^6 + SSY_{080}\tau^4 + SSY_{06}\tau^2 + SSY_{04}) = 0.\tag{15-39}$$

$$SSY_{010}\tau^6 + SSY_{08}\tau^4 + SSY_{06}\tau^2 + SSY_{04} = 0\tag{15-40}$$

其中  $SSY_{010}, \dots, SSY_{04}$  形式复杂, 具体形式略。

当  $n=0$  时, 设

$$\begin{aligned}U(\xi) &= o_x e^{h\xi} \\V(\xi) &= p_x e^{h\xi} \\ \Phi_x(\xi) &= x o_x e^{h\xi} \\ \Phi_y(\xi) &= x p_x e^{h\xi} \\W(\xi) &= q_x e^{h\xi}\end{aligned}\tag{15-41}$$

式中:  $o_x, p_x, q_x, x p_x$  和  $x q_x$  为实数待定常数,  $h$  为特征根。

将式(15-41)代入方程(15-29)可得:

$$h^4(SSX_{100}h^6 + SSX_{80}h^4 + SSX_{60}h^2 + SSX_{40}) = 0\tag{15-42}$$

$$SSX_{100}h^6 + SSX_{80}h^4 + SSX_{60}h^2 + SSX_{40} = 0\tag{15-43}$$

式中:  $SSX_{100}, \dots, SSX_{010}$  形式复杂, 具体形式略。

根据常微分方程理论, 补充解可得:

$$U^{**} = t_2 + t_3(\xi - 0.5) + t_4(\eta - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, e_{y_k}, e_{y_{k+1}}) +$$



$$\sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, o_{xk}, o_{xk+1}) \quad (15-44)$$

$$V^{**} = t_5 + t_6(\xi - 0.5) + t_7(\eta - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, f_{yk}, f_{yk+1}) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, p_{xk}, p_{xk+1}) \quad (15-45)$$

$$\Phi_x^{**} = t_8 + t_9(\xi - 0.5) + t_{10}(\eta - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, ye_{yk}, ye_{yk+1}) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xo_{xk}, xo_{xk+1}) \quad (15-46)$$

$$\Phi_y^{**} = t_{11} + t_{12}(\xi - 0.5) + t_{13}(\eta - 0.5) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, \mathcal{F}_{yk}, \mathcal{F}_{yk+1}) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, xp_{xk}, xp_{xk+1}) \quad (15-47)$$

$$W^{**} = t_1 + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(\tau_k, \tau_{k+1}, \eta, g_{yk}, g_{yk+1}) + \sum_{k=1,3,5} \Gamma(h_k, h_{k+1}, \xi, q_{xk}, q_{xk+1}) \quad (15-48)$$

式中:  $(g_{yk}, g_{yk+1}, q_{xk}, q_{xk+1}, k=1, 3, 5)$  为待定常数,  $\tau_k, \tau_{k+1} (k=1, 3, 5)$  是方程(15-40)的根。  $h_k, h_{k+1} (k=1, 3, 5)$  是方程(15-43)的根。

将式(15-44)、式(15-45)、式(15-46)、式(15-47)和式(15-48)中的多项式部分代入方程(15-29), 可得  $t_k (k=1, 2, \dots, 13)$  之间 5 个关系方程式。

将式(15-44)~式(15-48)  $\Gamma$  函数部分代入方程(15-29)任意 4 式, 可得 2 个关系矩阵。  $e_{yk}, e_{yk+1}, f_{yk}, f_{yk+1}, ye_{yk}, ye_{yk+1}, \mathcal{F}_{yk}, \mathcal{F}_{yk+1}$  可由  $g_{yk}, g_{yk+1} (k=1, 3, 5)$  推得;  $o_{xk}, o_{xk+1}, p_{xk}, p_{xk+1}, xo_{xk}, xo_{xk+1}, xp_{xk}, xp_{xk+1}$  可由  $q_{xk}, q_{xk+1} (k=1, 3, 5)$  推得。

这样式(15-44)~式(15-48)只有 20 个独立待定常数。

### 3. 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解组合

起来,可得到以  $\xi$ 、 $\eta$  形式表示的一般解析解:

$$W =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} \{ G_{1km} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + G_{2km} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) \} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} \{ Q_{1kn} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + Q_{2kn} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) \} + W^{**} \end{aligned} \quad (15-49)$$

$$U =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (Z_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (Z_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (Z_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (Z_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + Z_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (T_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (T_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (T_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (T_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + T_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + U^{**} \end{aligned} \quad (15-50)$$

$$V =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (R_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (R_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (R_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (R_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + R_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (S_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (S_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (S_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (S_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + S_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + V^{**}
\end{aligned}
\tag{15 - 51}$$

$$\Phi_x =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (ZY_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + ZY_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (ZY_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + ZY_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (ZY_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + ZY_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (ZY_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + ZY_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (TX_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + TX_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (TX_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + TX_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (TX_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + TX_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (TX_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + TX_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \Phi_x^{**}
\end{aligned} \quad (15-52)$$

$$\Phi_y =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (RY_{11k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + RY_{21k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{1km} (RY_{31k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + RY_{41k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (RY_{21k} \Psi_1(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + RY_{11k} \Psi_2(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} G_{2km} (RY_{41k} \Psi_3(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m) + RY_{31k} \Psi_4(\xi, \eta, r_k, r_{k+1}, m)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (SX_{11k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + SX_{21k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{1kn} (SX_{31k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + SX_{41k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (SX_{21k} \Psi_1(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + SX_{11k} \Psi_2(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,7,9} Q_{2kn} (SX_{41k} \Psi_3(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n) + SX_{31k} \Psi_4(\eta, \xi, s_k, s_{k+1}, n)) + \Phi_y^{**}
\end{aligned} \quad (15-53)$$

式中:  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1,3,5,7,9)$  和补充解中 20 个独立待定常数为一一般解析解中实数待定常数。

实际计算中, 设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解式 (15.49) ~ 式 (15.53) 共有  $20M+20$  个未知数 ( $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1,3,5,7,$

9)和补充解中 20 个独立待定常数)。对于基于一阶剪切理论的一般铺设矩形板屈曲、振动问题,共有 20 个独立的边界条件。将解析解代入 20 个边界条件中,形成 20 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数;在四个角点  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ , 根据该处 挠度、转角、弯矩或综合剪力平衡条件可有 20 个角点条件,又可建立 20 个线性方程,这样总共  $20M + 20$  个线性代数方程,合写为下式:

$$K\{C\} = \{0\} \quad (15-54)$$

式中:  $K$  为  $(20M + 20) \times (20M + 20)$  矩阵。

$$\{C\} = \{G_{111}, G_{211}, Q_{111}, Q_{211}, \dots, G_{19M}, G_{23M}, Q_{19M}, \\ Q_{29M}, t_1, t_2, \dots, q_{xk}, q_{xk+1}\}$$

当方程(15.54)有异于零的解(即  $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn} (k=1, 3, 5, 7, 9)$  与  $(t_1, t_2, \dots, q_{xk}, q_{xk+1})$  不同时为 0), 需要矩阵  $K$  的行列式等于 0, 此时的  $\omega$  即为所求频率。

## 第 16 章 各向异性稳态热传导解析

复合材料是典型的各向异性热传导介质。各向异性热传导问题在工程中有众多应用背景。但这一领域研究受到数学手段制约,很长时间没有取得实质性进展。本章将新型复级数方法用于各向异性热传导问题解析分析,建立了矩形域、斜形域和圆形域热传导问题解析解。

### 16.1 矩形域各向异性热传导控制方程

考虑矩形域( $a \times b$ ),温度场控制方程为:

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + 2k_{12} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + k_{22} \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = qa^2 \quad (16-1)$$

式中:  $k_{11} = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi$ ,  $k_{12} = (k_1 - k_2) \sin \phi \cos \phi$ ,  $k_{22} = k_2 \cos^2 \phi + k_1 \sin^2 \phi$ 。

$\phi$  为各向异性角,  $T$  为温度,  $q$  为单位体积热源函数,  $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 为导热系数,  $k_1$  和  $k_2$  代表主导热系数,  $\alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $\eta = \frac{y}{b}$ 。

### 16.2 矩形域问题解析解求解过程

齐次解和补充解

设方程 (16-1) 有如下齐次解:

$$T = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \quad (16-2)$$

式中:  $i^2 = -1$ 。

再设

$$f_m(r) = Ae^{im\pi\eta} \quad (16-3)$$

式中:  $m$  不能为 0,  $G$  为待定虚数常数,  $r$  是特征根。

将式(16-2)和式(16-3)代入方程式(16-1)可得

$$k_{11} + 2k_{12}\alpha r + k_{22}\alpha^2 r^2 = 0 \quad (16-4)$$

求解方程(16-4), 可得特征根

$$a_1 \pm b_1 i \quad (16-5)$$

$T$  齐次解可以表示为实数级数:

$$\begin{aligned} T = \sum_{m=1}^{\infty} & \left( A_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} \right. \\ & + A_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} \\ & + A_{3m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \cos m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} \\ & \left. + A_{4m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \cos m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} \right) \quad (16-6) \end{aligned}$$

式中:  $A_{jm} (j=1, 2, 3, 4)$  为任意常数。

当  $m=0$ , 根据常微分方程理论可以求解出一组补充解。

考虑一般性, 再设

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B e^{in\pi s \xi} e^{in\pi \eta} \quad (16-7)$$

式中:  $n \neq 0$ ,  $B$  为待定复数常数,  $s$  是特征根。

类似地, 可得另一个特征方程(16-8)和 2 个特征根:

$$k_{11}s^2 + 2k_{12}\alpha s + k_{22}\alpha^2 = 0 \quad (16-8)$$

$$c_k \pm d_k i (k=1) \quad (16-9)$$

另一组  $T$  齐次解可表示为

$$\begin{aligned}
T = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \right. \\
& B_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
& B_{3n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \cos n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \\
& \left. B_{4n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \cos n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} \right) \quad (16-10)
\end{aligned}$$

当  $n=0$ , 可以求解出另一组补充解。

### 特解

一般特解相对容易求得。在域内均布热源  $q$ , 特解  $T^{**}$  给出下式:

$$T^{**} = \frac{q}{4} \left( \frac{\xi(1-\xi)}{k_{11}} + \frac{\eta(1-\eta)}{\alpha^2 k_{22}} \right) a^2 \quad (16-11)$$

### 一般解析解

据线性偏微分方程解的可叠加性原理, 可将齐次解、补充解、特解组合起来, 可得到以  $\xi, \eta$  形式表示的一般解析解:

$$\begin{aligned}
T = & \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \right. \\
& A_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} \Big) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \right. \\
& B_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} \Big) + \\
& p_1 (\xi \eta + h_{16} \xi (1 - \xi)) + \\
& p_2 ((1 - \xi)(1 - \eta) + h_{16} \xi (1 - \xi)) + \\
& p_3 (\xi(1 - \eta) - h_{16} \xi (1 - \xi)) + \\
& p_4 (\eta(1 - \xi) - h_{16} \xi (1 - \xi)) + T^{**} \quad (16-12)
\end{aligned}$$



式中:  $A_{1m}, A_{2m}, B_{1n}, B_{2n}, P_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定常数,  $h_{16} = \frac{k_{12}}{k_{11}}\alpha, T^{**}$

特解。

### 边界条件

典型边界条件有 3 类:

$$(1) T = T_w$$

$$(2) -k_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} - k_{12} \alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} = q''$$

$$(3) -k_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} - k_{12} \alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} = h(T - T_\infty) \quad (16-13)$$

### 角点条件

在上述的解析解中,引入多项式形式的补充解可以处理复杂的边界问题。由于正弦级数在边界端点间断,需要补充角点条件。对于矩形域,一般有 4 个角点条件。

### 求解

根据热传导理论,可以容易得到  $q_x, q_y$  关于待定常数的表达式。实际计算中,设  $m=n, m$  最大取  $M$ , 解析解(16-12)共有  $4M+4$  个未知数。对于矩形域热传导问题,共有 4 个独立的边界条件。将解析解代入 4 个边界条件中,形成 4 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数,可以得到  $4M$  个线性代数方程;在四个角点  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ , 可有 4 个角点条件,又可建立 4 个线性方程,这样总共建立  $4M+4$  个线性方程,各向异性矩形域稳态热传导问题得解。

## 16.3 矩形域问题解析解数值分析部分

### 1. 验证计算

为了检验解析解的收敛性和稳定性,针对第一类温度边界条件进行计算,分析解析解的收敛性情况。

四边给定温度边界条件和角点条件如下:

$$\begin{aligned} T(0, \eta) &= 0 & T(1, \eta) &= 0 & T(\xi, 0) &= 0 & T(\xi, 1) &= 0 \\ T(0, 0) &= 0 & T(1, 0) &= 0 & T(1, 1) &= 0 & T(0, 1) &= 0 \end{aligned}$$

### 收敛性验证计算

各向异性介质的导热系数为  $k_1 = 40 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $k_2 = 1 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ 。矩形域尺寸:  $a = b = 1 \text{ m}$ , 热源函数  $q = 1 \text{ W}/\text{m}^3$ , 各向异性角为  $45^\circ$ 。计算结果见下表 16-1。可以看出随着  $M$  的增加, 中心无量纲温度很快趋于稳定, 这表明本章节收敛性很好

表 16-1 中心无量纲温度收敛性计算

	$M=4$	$M=8$	$M=12$	$M=16$	$M=24$
$T$	4.226	4.228	4.229	4.229	4.229

在其他参数不变情况下, 针对不同主方向角进行计算, 观察域内温度分布情况。各向异性介质的导热系数为  $k_1 = 40 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $k_2 = 1 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ 。矩形域尺寸:  $a = b = 1 \text{ m}$ , 热源函数  $q = 1 \text{ W}/\text{m}^3$ 。  $M = 40$ 。从表 12-2 ~ 表 12-3, 可看出温度边界满足很好。从表 12-3, 对于各向异性情况, 温度分布不都是具有轴对称性, 而具有中心对称性。

表 16-2  $T \times 10^3$  温度分布情况 ( $\theta = 0^\circ$ )

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.742	1.100	1.144	1.100	0.742	0.000
0.4	0.000	0.836	1.251	1.303	1.251	0.836	0.000
0.5	0.000	0.842	1.261	1.313	1.261	0.842	0.000
0.6	0.000	0.836	1.251	1.303	1.251	0.836	0.000
0.8	0.000	0.742	1.100	1.144	1.100	0.742	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 16-3  $T \times 10^3$  温度分布情况 ( $\theta = 45^\circ$ )

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	1.014	1.115	1.017	0.865	0.462	0.000
0.4	0.000	1.115	1.638	1.635	1.485	0.865	0.000
0.5	0.000	1.017	1.635	1.719	1.635	1.017	0.000
0.6	0.000	0.865	1.485	1.635	1.638	1.115	0.000
0.8	0.000	0.462	0.865	1.017	1.115	1.014	0.000
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

### 数值计算算例

针对两种介质(一种为强各向异性材料,另一种为弱各向异性材料)进行计算,求解区域为第一类温度给定边界条件( $T_w = 0$ ),矩形域。热源函数  $q = 1\text{W/m}^3$ 。导热系数如下:

材料 1:  $k_1 = 93.8\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $k_2 = 9.38\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$

材料 2:  $k_1 = 93.8\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $k_2 = 46.9\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$

矩形域尺寸:  $b = 1\text{m}$ ,  $a$  为  $1\text{m}$  或  $2\text{m}$ 。计算结果见图 12-1,  $M =$

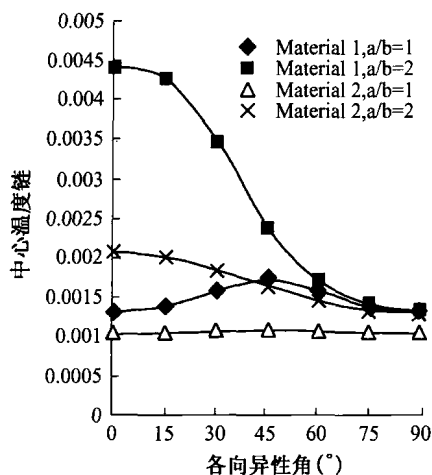


图 12-1 内含热源  $q$  的四边给定温度矩形域中心温度与各向异性角变化  
( $b = 1\text{m}$ ,  $q = 1\text{W/m}^3$ )

40. 改变各向异性角  $\theta$  和  $a/b$ , 以分析中心温度的变化趋势。计算结果显示, 不同的各向异性角  $\theta$  和横宽比  $a/b$ , 温度场的分布会有很大不同。对于不同的各向异性介质, 即使其他参数相同, 温度场变化趋势也有区别。由此, 对各向异性热传导问题, 需要仔细计算, 不能简单延用各向同性问题的结论。

## 16.4 各向异性斜形域稳态温度场解析

考虑各向异性斜形域。引入斜坐标变换, 可将  $x-y$  坐标系下的斜形域变换为斜坐标  $\xi-\eta$  下的正方形域(见图 12-2)。

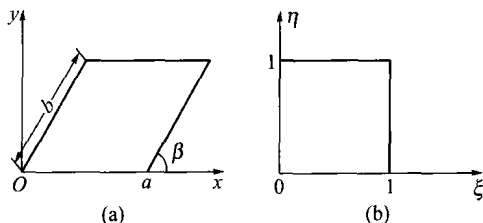


图 12-2

$$x = a\xi + b\eta\cos\beta; y = \eta b\sin\beta \quad (16-14)$$

引入斜坐标变换式(16-14), 控制方程(16-1)改写为:

$$k_{20} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + 2k_{11}\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + k_{02}\alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = qa^2 \quad (16-15)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{20} &= (k_1 - 2k_{12}\tan\beta + k_2\tan^2\beta) \\ K_{11} &= \frac{(k_{12} - k_2\tan\beta)}{\sin\beta} \\ K_{02} &= \frac{k_2}{\sin^2\beta} \end{aligned} \quad (16-16)$$

采取类似步骤, 可得斜形域温度场一般解析解:

$$T =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( A_{1m} \frac{\sinh m \pi b_1 \eta \sin m \pi (a_1 (1 - \eta) + 1 - \xi)}{\sinh m \pi b_1} + \right.$$

$$\left. A_{2m} \frac{\sinh m \pi b_1 (1 - \eta) \sin m \pi (a_1 \eta + \xi)}{\sinh m \pi b_1} \right) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( B_{1n} \frac{\sinh n \pi d_1 \xi \sin n \pi (c_1 (1 - \xi) + 1 - \eta)}{\sinh n \pi d_1} + \right.$$

$$\left. B_{2n} \frac{\sinh n \pi d_1 (1 - \xi) \sin n \pi (c_1 \xi + \eta)}{\sinh n \pi d_1} \right) +$$

$$p_1 (\xi \eta + h_{16} \xi (1 - \xi)) +$$

$$p_2 ((1 - \xi)(1 - \eta) + h_{16} \xi (1 - \xi)) +$$

$$p_3 (\xi (1 - \eta) - h_{16} \xi (1 - \xi)) +$$

$$p_4 (\eta (1 - \xi) - h_{16} \xi (1 - \xi)) + T^{**} \quad (16-17)$$

式中:  $A_{1m}, A_{2m}, B_{1n}, B_{2n}, p_j (j=1, 2, 3, 4)$  为待定实数常数。  $h_{16} = \frac{K_{11}}{K_{20}} \alpha_0$ 。

$m, n$  为整数,  $T^{**}$  为特解。

$r = a_1 \pm b_1 i$  为如下特征方程的根:

$$K_{20} + 2K_{11} \alpha r + K_{02} (r \alpha)^2 = 0 \quad (16-18)$$

$s = c_1 \pm d_1 i$  为如下另一特征方程的根:

$$K_{11} s^2 + 2K_{12} \alpha s + K_{22} \alpha^2 = 0 \quad (16-19)$$

按照矩形域求解方法,可以求解斜形域温度场问题。实际计算中,设  $m=n$ ,  $m$  最大取  $M$ , 解析解 (16-17) 共有  $4M+4$  个未知数。对于斜形域热传导问题,共有 4 个独立的边界条件。将解析解 (16-17) 代入 4 个边界条件中,形成 4 个方程,将所得每个方程展成  $M$  项正弦级数,可以得到  $4M$  个线性代数方程;在四个角点  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ , 可有 4 个角点条件,又可建立 4 个线性方程,这样总共建立  $4M+4$  个线性方程,各向异性斜形域稳态热传导问题得解。

## 16.5 各向异性圆形域稳态温度场解析

考虑各向异性圆形域。极坐标系下温度场控制方程为：

$$k_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2k_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + k_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = q \quad (16-20)$$

引入坐标变换：

$$r = e^t \quad (16-21)$$

将式(16-21)代入方程(16-20),可得：

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \theta} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = qr^2 \quad (16-22)$$

设方程(16-22)有如下齐次解：

$$T = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(t) e^{im\theta} \quad (16-23)$$

式中： $i^2 = -1$ ; $m$ 为整数。

设

$$f_m(t) = Ae^{imtr} \quad (16-24)$$

式中： $m$ 为非0整数, $A$ 为待定复数常数, $r$ 为特征根。

将式(16-23)和式(16-24)代入方程(16-22)可得特征方程：

$$k_{11}r^2 + 2k_{12}r + k_{22} = 0 \quad (16-25)$$

求解方程(16-25),可得特征根：

$$a_1 \pm b_1 i \quad (16-26)$$

当 $m=0$ ,根据常微分方程理论可以求出补充解。

圆形域温度场一般解析解可写为下式：

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m} r^{-b_1} \cos(m(\theta + a_1 \ln r)) + A_{2m} r^{-b_1} \sin(m(\theta + a_1 \ln r)) +$$

$$A_{3m} r^{b_1} \cos(m(\theta + a_1 \ln r)) +$$

$$A_{4m} r^{b_1} \sin(m(\theta + a_1 \ln r)) + p_1 + p_2 \ln r + T^* \quad (16-27)$$

式中:  $A_{1m}, A_{2m}, A_{3m}, A_{4m}, p_j (j=1,2)$  为待定常数,  $T^*$  为特解。

采用与圆板弯曲类似的方法,式(16-27)可以求解圆形域温度场问题。在实际计算中,  $m$  不可能取无穷大,设  $m$  最多取到  $M$ 。这样一般解可以有  $4M+2$  个未知数,对于环形域每边有 1 个边界条件,在每个边界条件所建立的方程中将非傅里叶级数的部分展开成为傅里叶级数,根据级数的正交性可得到  $4M+2$  方程可求得  $4M+2$  未知数。

对于实心圆形域,根据中心处温度、热流为有限值的条件,可将待定常数削减一半,再根据圆形域外边界的 1 个边界条件建立  $2M+1$  线性代数方程,可以求解  $2M+1$  个未知数,这样各向异性圆(环形)域稳态温度场问题得解。

# 附录 复数级数解推导过程

## A 1 对共轭复数根情况

对任一  $m$ , 复合材料板结构特征方程应有共轭复数根  $r_k$

$$r_k = a_k \pm ib_k$$

对特定的  $m$ 、特征根  $a_k + ib_k$ , 相应级数项为

$$W_{k1m+} = G_{1cm+} e^{i\sigma\eta\xi} e^{i\sigma\tau\eta(a_k + ib_k)} \quad (1)$$

式中:  $G_{1cm+}$  是复常数,  $G_{1cm+} = G_{1cm+,r} + iG_{1cm+,i}$ ,  $G_{1cm+,r}$ ,  $G_{1cm+,i}$  是实数。

对应同一  $m$ 、特征根  $a_k - ib_k$ , 对应级数项为

$$W_{k2m+} = G_{2cm+} e^{i\sigma\eta\xi} e^{i\sigma\tau\eta(a_k - ib_k)} \quad (2)$$

式中:  $G_{2cm+}$  是复常数,  $G_{2cm+} = G_{2cm+,r} + iG_{2cm+,i}$ ,  $G_{2cm+,r}$ ,  $G_{2cm+,i}$  是实数。

对应  $m$  和共轭复根  $a_k \pm ib_k$ , 对应级数项合写为

$$W_{km+} = W_{k1m+} + W_{k2m+} =$$

$$\begin{aligned} & G_{1km+} \sinh(m\pi b_k \eta) \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) + G_{2km+} \cosh(m\pi b_k \eta) \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) + \\ & G_{3km+} \sinh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) + G_{4km+} \cosh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) + i \\ & [-G_{3km+} \sinh(m\pi b_k \eta) \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) - G_{4km+} \cosh(m\pi b_k \eta) \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) + \\ & G_{1km+} \sinh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) + G_{2km+} \cosh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi))] \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $G_{1km+}$ ,  $G_{2km+}$ ,  $G_{3km+}$ ,  $G_{4km+}$  是实数, 且可从  $G_{1cm+,r}$ ,  $G_{1cm+,i}$ ,  $G_{2cm+,r}$ ,  $G_{2cm+,i}$  变换而来。



对应  $-m$ , 对应特征根是  $a_k \pm ib_k$ 。

采取相似的步骤, 对应  $-m$  和  $a_k \pm ib_k$ , 相应级数项为

$$\begin{aligned}
 W_{km-} = & -G_{1km-} \sinh(m \pi b_k \eta) \cos(m \pi (a_k \eta + \xi)) + \\
 & G_{2km-} \cosh(m \pi b_k \eta) \cos(m \pi (a_k \eta + \xi)) + G_{3km-} \sinh(m \pi b_k \eta) \\
 & \sin(m \pi (a_k \eta + \xi)) - G_{4km-} \cosh(m \pi b_k \eta) \sin(m \pi (a_k \eta + \xi)) + \\
 & i[ (+G_{3km-} \sinh(m \pi b_k \eta) \cos(m \pi (a_k \eta + \xi)) - G_{4km-} \cosh(m \pi b_k \eta) \\
 & \cos(m \pi (a_k \eta + \xi)) + G_{1km-} \sinh(m \pi b_k \eta) \sin(m \pi (a_k \eta + \xi)) - \\
 & G_{2km-} \cosh(m \pi b_k \eta) \sin(m \pi (a_k \eta + \xi))] \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中:  $G_{1km-}, G_{2km-}, G_{3km-}, G_{4km-}$  是实数。

对应  $m$  和  $-m$ , 对应级数项合写为

$$W_{km} = W_{km+} + W_{km-} \quad (5)$$

考虑到挠度函数是实际物理量,  $W_{km}$  的虚部应是 0, 这样, 将式(3)和式(4)代入式(5),  $W_{km}$  的虚部为 0 条件, 可得

$$\begin{cases} G_{1km+} = -G_{1km-} \\ G_{2km+} = G_{2km-} \\ G_{3km+} = G_{3km-} \\ G_{4km+} = -G_{4km-} \end{cases} \quad (6)$$

可写为

$$\begin{aligned}
 W_{km} = & 2G_{1km+} \sinh(m \pi b_k \eta) \cos(m \pi (a_k \eta + \xi)) + 2G_{2km+} \cosh(m \pi \\
 & b_k \eta) \cos(m \pi (a_k \eta + \xi)) + 2G_{3km+} \sinh(m \pi b_k \eta) \sin(m \pi (a_k \eta + \xi)) + \\
 & 2G_{4km+} \cosh(m \pi b_k \eta) \sin(m \pi (a_k \eta + \xi)) \quad (7)
 \end{aligned}$$

鉴于  $m$  很大时,  $\sinh(m \pi b_k \eta)$  与  $\cosh(m \pi b_k \eta)$  逐渐接近, 基本解函数也逐渐趋于线性相关。由此引入变换矩阵。

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1km+} = 0.5 \left( \frac{G_{3km} \cos(m\pi a_k) + G_{1km} \sin(m\pi a_k)}{\sinh(m\pi b_k)} \right. \\ \quad \left. \cos(m\pi) - G_{4km} \tanh(m\pi b_k) \right) \\ G_{2km+} = 0.5 G_{4km} \\ G_{3km+} = 0.5 \left( \frac{-G_{1km} \cos(m\pi a_k) + G_{3km} \sin(m\pi a_k)}{\sinh(m\pi b_k)} \right. \\ \quad \left. \cos(m\pi) - G_{2km} \tanh(m\pi b_k) \right) \\ G_{4km+} = 0.5 G_{2km} \end{array} \right. \quad (8)$$

引入式(8),将式(7)改写为

$$\begin{aligned} W_{km} = & G_{1km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \sin(m\pi(a_k(1-\eta) + 1-\xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & G_{2km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \sin(m\pi(a_k \eta + \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & G_{3km} \frac{\sinh(m\pi b_k \eta) \cos(m\pi(a_k(1-\eta) + 1-\xi))}{\sinh(m\pi b_k)} + \\ & G_{4km} \frac{\sinh(m\pi b_k(1-\eta)) \cos(m\pi(a_k \eta + \xi))}{\sinh(m\pi b_k)} \end{aligned} \quad (9)$$

## B 一对实数根情况

对任一  $m$ , 复合材料结构特征方程可能有 1 对实数根:  $a_k, a_{k+1}$ 。

对特定的  $m$ 、特征根  $a_k$ , 相应级数项为

$$W_{k1m+} = G_{1cm+} e^{im\pi\xi} e^{im\pi a_k \eta} \quad (10)$$

式中:  $G_{1cm+}$  是复常数,  $G_{1cm+} = G_{1cm+,r} + iG_{1cm+,i}$ ,  $G_{1cm+,r}, G_{1cm+,i}$  是实数。

对应同一  $m$ 、特征根  $a_{k+1}$ , 对应级数项为

$$W_{k2m+} = G_{2cm+} e^{im\pi\xi} e^{i\pi a_{k+1}\eta} \quad (11)$$

式中:  $G_{2cm+}$  是复常数,  $G_{2cm+} = G_{2cm+,r} + iG_{2cm+,i}$ ,  $G_{2cm+,r}$ ,  $G_{2cm+,i}$  是实数。

对应  $m$  和  $a_k$ , 相应级数项为

$$\begin{aligned} W_{k1m+} &= G_{1cm+} e^{im\pi\xi} e^{im\pi a_k \eta} = \\ &G_{1km+} \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) + G_{2km+} \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) + i \\ &(G_{1km+} \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) - G_{2km+} \cos(m\pi(a_k \eta + \xi))) \quad (12) \end{aligned}$$

式中:  $G_{1km+}$ ,  $G_{2km+}$  是实数, 可以由  $G_{1cm+,r}$ ,  $G_{1cm+,i}$  推导而来。

对应  $-m$  和  $a_k$ , 相应级数项可写为

$$\begin{aligned} W_{km-} &= G_{1km-} \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) - G_{2km-} \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) + \\ &i(-G_{1km-} \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) - G_{2km-} \cos(m\pi(a_k \eta + \xi))) \quad (13) \end{aligned}$$

式中:  $G_{1km-}$ ,  $G_{2km-}$  为实数。

对应  $m$  和  $-m$ , 相应级数项为

$$W_{km} = W_{km+} + W_{km-} \quad (14)$$

考虑到位移函数  $W$  是一物理量, 级数项  $W_{km}$  的虚数部分应为 0。

由此, 将式(12)和式(13)代入式(14), 根据  $W_{km}$  的虚数部分应为 0 的条件, 可得

$$\begin{aligned} G_{1km+} &= +G_{1km-} \\ G_{2km+} &= -G_{2km-} \quad (15) \end{aligned}$$

将式(15)代入式(14)可得:

$$W_{km} = 2G_{1km+} \cos(m\pi(a_k \eta + \xi)) + 2G_{2km+} \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) \quad (16)$$

引入转换矩阵:

$$\begin{aligned} G_{1km+} &= 0.5 G_{1km} \sin(m\pi a_k) \cos(m\pi) \\ G_{2km+} &= 0.5 (G_{2km} - G_{1km} \cos(m\pi a_k) \cos(m\pi)) \quad (17) \end{aligned}$$

式(16)可以改写为下式:

$$W_{km} = G_{1km} \sin(m\pi(a_k(1-\eta) + 1-\xi)) + G_{2km} \sin(m\pi(a_k \eta + \xi)) \quad (18)$$

## 参 考 文 献

- [1] Reddy J N, Khdeir A A, and Librescu L, Levy Type Solutions for Symmetrically Laminated Rectangular Plates Using First - Order Shear Deformation Theory. J. Appl. Mech. , 54 (1984) : 740 - 742.
- [2] Reissner E. The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech. , 12(1945) : 69 - 77.
- [3] Mindlin, R D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech. , 18(1951) : 31 - 38.
- [4] Reddy J N, Bending of laminated anisotropic shells by a shear deformable finite element. Fibre Sci Tech 17, 1982 : 9 - 24.
- [5] Reissner E. Stavsky Y. Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates. , E. , The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech. , 1961 ; 28(3) : 402 - 408.
- [6] Whitney J M, Pagano N J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. J. Appl. Mech. , 37(1970) : 1031 - 1036.
- [7] Real F Palardy, Anthony N. Palazotto, Buckling and Vibrations of Composite Plates Using the Levy Method. Comp Struct. , 14(1990) : 61 - 86.
- [8] Noor A K, Hathers M D. Shear flexible finite element model of laminated composite plates and shells. NASN - TN - D8044, 1975.
- [9] Ren J G. Exact Solutions for Laminated Cylindrical Shells in Cylindrical Bending. J. Composite Materials Science and Technology, 29(1987) : 169 - 187.
- [10] Pagano N J, Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. J. Composite Materials, 3(1969) : 399 - 411.
- [11] Whitney J M. Bending - extensional coupling in laminated plates under transverse loading. J. Comp. Mater. , 3(1969) : 20 - 28.
- [12] Whitney J M, Leissa A W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. J. Appl. Mech. , 36 (1969) : 261 - 266.
- [13] Whitney J M. Leissa A W. Analysis of a simply supported laminated anisotropic rectangular

plate, *AIAA J.*, 8, 1 (1970) : 28 – 33.

- [14] Sudhakar Sharma, N G R Iyengar, Murthy P N. The Bucking of Anti – symmetrically Laminated Angle – Ply and Cross – Ply Plates . *Fibre Science and Technology*, 13 (1980) : 29 – 48.
- [15] Reddy J N. A simple higher – order theory for laminated composite plates, *ASME J. Appl. Mech.*, 51 (1984) : 745 – 752.
- [16] Ashton J E, Waddoups M E. Analysis of anisotropic plates. *J. Comp. Mater.*, 3 (1969) 148 – 165.
- [17] Bert C W. A critical evalution of new plate theories applied to laminated composites. *Compos struct*, 2 (1984) : 329 – 347.
- [18] Jones R M. Morgan, H S, Whitney, J M. Buckling and vibration of antisymmetrically laminated angle – ply rectangular plates. *J. App. Mech.*, 40 (1973) : 1143 – 1144.
- [19] Dong S B, Pister K S, Taylor R I. On the theory of laminated anisotropic shells and plates, *J Aerospace Sci*, 1962; 29 (8) : 969 – 975.
- [20] Reddy J N, Khdeir A A, Buckling and Vibration of Laminated Composite Plates Using Various Plate Theories . *AIAA J.*, 27, 12 (1989) : 1808 – 1817.
- [21] Khdeir A A, Reddy J N, Libresscu Analytical Solutions of a Refined Shear – Deformation Theory for Rectangular, Composite Plates. *International Journal Solids and Structures*, 23 (1987) : 1447 – 1463.
- [22] Lo K H, Christensen R M, Wu E M. A high order theory of plate deformation, part 1 : Homogeneous plates. *J. Appl. Mech.*, 44 (1997) : 663 – 668.
- [23] He JiFan, Zhang Shuang – Wang. Antisymmetric bending analysis of symmetric laminated plates including transverse shear and normal effects. *Composite Structures*, 37 (1997) : 393 – 417.
- [24] He J – F, Chou, M, zhang X. Bending analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory . *J. Comp. Struct.*, 1993, 24 (2) : 125 – 138.
- [25] HE J, CHEN Y, Duan J, proceedings of Internatioal Symposium on Composite Material and Structures, 1968 : 214 – 219.
- [26] Noor A K, Burton W S. Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates, *ASME Applied Mechanics Reviews*, 1989, Vol. 42 : 1 – 13.
- [27] Ye Jianqiao, Soldatos K P. Three – dimensional Vibration of laminated cylinders and cylindrical panels with a symmetric or anisymmetric cross – ply lay – up. *Comp. engng.*, 1994.
- [28] Ren J G, Analysis of Simply – Supported Laminated Circular Cylindrical Shell Roofs, *Composite Structure*, 11 (1989) : 277 – 292.
- [29] Heyliger P, Brooks S, Exact solutions for laminated piezoelectric plates in cylindrical ben-

ding, J. Appl. Mech, 63(1996) : 903 – 910.

- [30] Lee C. M. , Three – dimensional solution for simply supported thick rectangular plates. Nucl. Eng. DES 6. 1967; 155 – 161.
- [31] Lei M M, Shun Cheng. Buckling of composite and homogeneous isotropic cylindrical shells under axial and radial loading. J. Appl. Mech. , 4(1969) : 791 – 796.
- [32] Noor A K, Burton. Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates. Compos Struct. 11 (2). Jan. 1989.
- [33] Pagano N J. Exact solution for composite laminates in cylindrical bending. J Compos Mater, 3(1969) : 398 – 411.
- [34] Pagano N J. Exact solutions for rectangular bi – directional composites and sandwich plates . J Compos Mater, 4(1970) : 20 – 34.
- [35] Pagano N J, Hatfield S J. Elastic behavior of multilayered bi – directional composites. AIAA J, 10(7) , 1972; 931 – 933.
- [36] Pagano. Stress fields in composite laminates . Int J Solids Struct, 14(4) , 1978; 385 – 400.
- [37] Phan N D, Reddy J N. Analysis of laminated composite plates using a higher – order shear deformation theory, Int J Numer Methods Eng, 21. 1985; 2201 – 2219.
- [38] Turvey G J. Bending of laterally loaded, simply supported, moderately thick antisymmetrically laminated rectangular plates, Fibre Sci Tech, 10(3) , 1977; 211 – 232.
- [39] Savola M, Reddy J N. Three – dimensional thermal analysis of laminated composite plates. Int. j. Solids Struct, 32(1995) : 593 – 608.
- [40] Savola M, Laudiero F, Tralll A. A two – dimensional theory for the analysis of laminated plates. Computat. Mechanics, 14(1994) : 38 – 51.
- [41] Savola M, Laudiero, F, Tralll A. A refined theory for laminated beams – part I; a new high – order approach. Meccanica, 28(1993) : 39 – 51.
- [42] Savola M, Tralll A, Laudiero F. A refined theory for laminated beams – part II; A new high – order approach. Meccanica, 28(1993) : 39 – 51.
- [43] Savola, M. On the accuracy on 1 – D models for multilayered composite beams. Int. J. Solids Struct. , 33(1996) : 521 – 544.
- [44] Carvellll V, M Savola, Assessment of plate theories for multilayered angle – ply plates. Composite Structure, 39(1997) : 197 – 207.
- [45] Abu – Ajia K, Chaudhurl. R A. Moderately thick angle – ply cylindrical shells under internal pressure. J. Appl. Mech. 56(1989) : 652 – 657.
- [46] Srinvas S. A refined analysis of composite lamintes. J. Sound. Vib. , 30(4) , 1973; 495 – 507.
- [47] Bert C W, Francis P II. Composite material mechanics; structural mechanics. AIAA J. , 12(9) , 1974; 1173 – 1186.

- [48] Blech J J: Axisymmetric stress distribution in anisotropic cylinders of finite length. AIAA J. ,7(1),1969: 59 – 64.
- [49] Chandrashekhara K, Gopalakrishnan P. Elasticity solution for a multilayered transversely isotropic circular cylindrical shell. J. Appl. Mech. ,49(1982): 108 – 114.
- [50] Chaudhurl R A, Balaraman K, Kunukkasseril V X. Arbitrarily laminated, anisotropic cylindrical shell under Internal pressure, AIAA J. ,24(11),1986: 1851 – 1858.
- [51] Chaudhurl R A, Abu – Arja K R. Closed – form solutions for arbitrary laminated anisotropic cylindrical shells including shear deformation, AIAA J. ,27(11),1989: 1597 – 1605.
- [52] Kapania R K. A review on the analysis of laminated shells, J Pressure Vessel Tech ASME, 111. May 1989: 88 – 96.
- [53] Khdeir A A, Librescu, L, Frederick D. A shear deformation theory of laminated composite shallow shell – type panels and their response analysis; static response . Acta Mechanica, 77 (1989), 1 – 12.
- [54] Noor A K and Burton W S. Three – dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plate, Trans. ASME, JAM, 57(1), 1990: 18 – 188.
- [55] Reddy J N. Bending of laminated anisotropic shells by a shear deformable finite element, Fibre Sci Tech 17, 1982: 9 – 24.
- [56] Reddy J N. Exact solutions of moderately thick laminated shells, J Eng Mech ASCE. 110 (5), May 1984: 794 – 809.
- [57] Yuan F G, Cross – Plyed Cylindrical Composite shells under Transverse Shell under Transverse End Load. Journal of Composite Materials, Vol. 29, No. 7, 1995: 903 – 925.
- [58] Bhaskar J K, Varadan J K, Exact elasticity solution for laminated anisotropic cylindrical shells, J. Appl. Mech. ,60(1993): 41 – 47.
- [59] Yaun F G. 1993, Bending of Filament Wound Composite Laminated Cylindrical Shells. Composite Engineering, 3(9): 835 – 839.
- [60] Yaun F G. 1993, Exact Solutions for Laminated Composite Cylindrical Shells in Cylindrical Bending. Journal of Reinforced Plastics and Composite, Vol. 11. , No4. , 1992: 340 – 37.
- [61] savithri S, Varadan T K, Laminated Plates Under Distributed and Concentrated Loads. J. Appl. Mech. ,3(59), 1992: 211 – 214.
- [62] Alavandi Bhimaraddi, Chandrashekhara K, Three – dimensional elasticity solution for static response of simply supported orthotropic cylindrical shells. Composite Structures, 20 (1992): 227 – 235.
- [63] Alavandi Bhimaraddi. Three – dimensional elasticity solution for static response of orthotropic doubly curved shallow shells on rectangular planform. Composite Structures, 24(1993): 67 – 77.

- [64] Kamal R. Abu - Arja, Reaz A. Chaudhuri, Moderately Thick Angle - ply Cylindrical Shells Under Internal Pressure. ,J. Appl. Mech, 56(1989) : 652 - 657.
- [65] Tooth A S, Banks W M, Rahman D h a. The Specially Orthotropic GRP Multi - Layered Cylindrical Shell - A Theoretical Approach for the General Loading Case. Composite Structures 9(1988) : 53 - 68.
- [66] Tooth A S, Banks W M, Rahman D h a. The Specially Orthotropic GRP Multi - Layered Cylindrical Shell - The radial patch load. Composite Structures 9(1998) : 69 - 83.
- [67] Zhang Xingzhou. Steady - State Temperatures in an Anisotropic Strip, J of Heat Transfer, February 1990, Vol. 112/19.
- [68] Wang Zhen Ming, ect. The finite deflection equation of anisotropy laminated shallow shells. Applied mathematics and mechanics, 3(1982).
- [69] 张智舟, 何积范. 考虑横向剪切变形的反对称铺设层合板的弯曲. 复合材料学报, 1995, 12(1) : 81 - 91.
- [70] 丁皓江, 任永坚, 邹道勤, 陈伟球. 球面各向同性弹性力学的位移解法. 力学学报, 1994, 26(2) : 86 - 197.
- [71] 张鸿庆, 吴方向. 一类偏微分方程组的一般解及其在壳体理论中的运用. 力学学报, 1992, 24(6) : 700 - 707.
- [72] 黄炎, 任均国. 简支扁壳弯曲问题的一般解. 国防科技大学学报, Vol. 12 No. 2, 1990 : 23 - 29.
- [73] 王炜. 弹性常曲率扁壳通解的完备性和不唯一性, 力学学报, Vol. 28 No. 5, 1996 : 532 - 541.
- [74] 程银水, 劭震豪. Reissner 矩形板的弯曲问题, 上海力学, Vol. 15 No. 1, 1994 : 37 - 45.
- [75] 韩建强. Reissner 厚板的一般解析解及其应用, 工程力学, Vol. 15 No. 1, 1990 : 17 - 27.
- [76] 汪丽苹, 夏人伟. 一种求解各向异性夹芯复合材料锥壳弯曲、稳定和振动问题的有效方法, 复合材料学报, Vol. 10 No. 2, 1993 : 25 - 31.
- [77] 王孝国, 强士中, 范加参, 贾春生. 求解板弯曲问题的一种新方法. 应用力学学报, 1997 : 14(4) : 25 - 31 .
- [78] 中国科学院力学研究所固体力学研究室板壳组. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动. 北京 : 科学出版社, 1977.
- [79] 列赫尼茨基, 胡海昌译. 各向异性板. 北京 : 科学出版社, 1963.
- [80] 刘锡礼, 王秉权. 复合材料力学基础. 北京 : 中国建筑出版社, 1984.
- [81] 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学. 北京 : 机械出版社, 1991.
- [82] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论. 武汉 : 西南交通大学出版社, 1993.
- [83] 杨耀乾. 薄壳理论. 北京 : 中国铁道出版社, 1981.
- [84] 罗祖道, 李思简. 北京 : 各向异性材料力学. 上海 : 上海交通大学出版社, 1994.
- [85] 张承宗. 各向异性圆柱壳线性弯曲振动稳定问题的一般解析解. 第九届结构动力学学



术会议论文集,1995.

- [86] 张承宗. 各向异性稳态渗流复级数解析分析法. 海军工程学院学报,1996(1).
- [87] 张承宗. 具有复杂边界条件的各向异性矩形板稳态热传导解析. 上海航天,1997(6).
- [88] 张承宗等. 拉压模量不等对纤维增强复合材料结构力学计算结果的各影响分析. 纤维复合材料,1998.
- [89] 张承宗等. 各向异性材料热敏感性分析. 纤维复合材料,1998(2).
- [90] 张承宗. 复合材料斜交板弯曲解析. 桥梁建设,1998.
- [91] 张承宗. 对称角铺设纤维增强斜形固支板弯曲解析. 上海航天,1998.
- [92] 张承宗. 纤维增强复合材料对称角铺设矩形板结构弯曲解析研究. 船舶力学,1998(5).
- [93] 张承宗等. 纤维增强复合材料矩形板弯曲强度解析研究. 船舶科学技术,1998.
- [94] 张承宗等. 四边对流换热的内含热源各向异性矩形板稳态热传导解析. 热能动力工程,1998.
- [95] 张承宗等. 各向异性矩形悬壁板稳态热传导解析. 计算物理,1999.
- [96] 张承宗. 四边给定温度的复合材料板稳态热传导解析研究. 环境与强度,1998(2).
- [97] 张承宗. 任意铺设复合材料矩形薄板横向弯曲一般解析解. 环境与强度,1998(4).
- [98] 张承宗. 各向异性简支斜形板弯曲解析. 航空计算技术,1998. (4)
- [99] 张承宗. 基于一阶剪切理论的各向异性矩形板横向弯曲一般解析解. 上海航天,1999.
- [100] 张承宗, 杨光松. 各向异性板结构横向弯曲一般解析解. 力学学报,1996(4): 429-440
- [101] 张承宗. 复合材料板壳结构力学求解新体系. 海军工程学院博士学位论文,1999(1).

## 内 容 简 介

本书以复合材料板壳结构为背景,系统介绍了求解偏微分方程(组)边值问题的新方法——复级数方法,并应用于复合材料板壳结构的解析求解。首次建立了基于经典理论、一阶剪切理论,采取对称角铺设、任意铺设方式的层合矩形板、斜形板横向弯曲问题解析解,还给出了经典理论、一阶剪切理论的圆柱壳静力响应解析解,针对各向异性圆板弯曲问题、矩形域平面应力问题和矩形扁壳弯曲问题也以复级数方法给出解析解。经实际数值验证所得一般解析解收敛稳定,可以用来计算分析复合材料结构力学问题。本书复数一般解体系不仅可用于求解本书涉及到的力学问题,还可处理其他工程力学问题。书中在大量数值计算的基础上,研究复合材料板壳结构特有的横向剪切效应、拉剪耦合效应、拉弯耦合效应、弯扭耦合效应对复合材料板壳结构的影响,给出了一些有意义的结论。

A new type complex series method (NCSM) for solving the boundary value problem of a system of partial differential equations with constant coefficients is presented to analyze the composite laminated plate and shell. In the book, NCSM is applied to analyze the bending of rectangular, skew plate laminated plate with symmetric and skew - symmetric angle - ply or general ply using Classical Plate theory (CPT) and first - order shear deformation theory (FSDT). These analytical solutions for preceding problem are presented. The analytical solutions on linear mechanical response of

composite cylindrical shell using FSDT and CPT with arbitrary laminations are obtained by NCSM. General analytical solutions for plane stress problem in rectangular domain and the bending of circular anisotropic plate by NCSM are presented in the book. NCSM is also suggested to study the bending of generally laminated rectangular shallow shell subjected to static loads using CPT and the general analytical solutions are obtained. Numerical results indicate the validity of NCSM. The effectiveness of the new technique is determined to analyze the mechanical problem for the composite plate and shell. NCSM can be used to not only the problems in present book but also can be used to other problems in engineering mechanics. On the base of a number of computations, the effects of the shear deformations and shear – stretching coupling and bending – stretching and bending – twisting coupling in the composite plate and shell structure are performed and some results are presented.